

Castelnovo Ne' Monti, 9 ottobre 2018
GRUPPO SECONDARIA DI 2° GRADO

Strategie per il recupero

Rosetta Zan
rosetta.zan@unipi.it

1. LA DIAGNOSI

2. L'INTERVENTO

1. LA DIAGNOSI

NON È PORTATO

NON S'IMPEGNA ABBASTANZA

NON CAPISCE

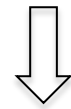
NON SA STUDIARE NEL MODO GIUSTO

HA LACUNE DI BASE

HA UN ATTEGGIAMENTO NEGATIVO
VERSO LA MATEMATICA

Le domande che ci poniamo ogni volta

- Cosa intendiamo?
- Da cosa lo deduciamo?
- Come si può intervenire?



Le strategie dipendono
dall'obiettivo

Quale obiettivo si dovrebbe porre l'intervento di recupero?

...rimuovere le cause del problema

- Quali possono essere le cause?

Le domande che ci poniamo ogni volta

- Cosa intendiamo?
- Da cosa lo deduciamo?
- Quali possono essere le cause?
- Come si può intervenire?

NON È PORTATO

NON S'IMPEGNA ABBASTANZA

NON CAPISCE

USA UN METODO DI STUDIO SBAGLIATO

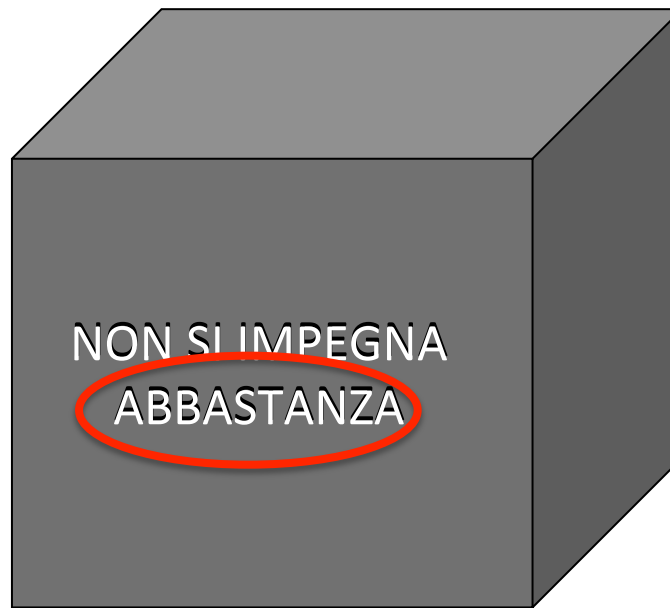
HA LACUNE DI BASE

HA UN ATTEGGIAMENTO NEGATIVO
VERSO LA MATEMATICA

L'IMPEGNO

NON SI IMPEGNA
ABBASTANZA

- Cosa vuol dire?
- Da cosa si vede?



- Cosa vuol dire?
- Da cosa si vede?

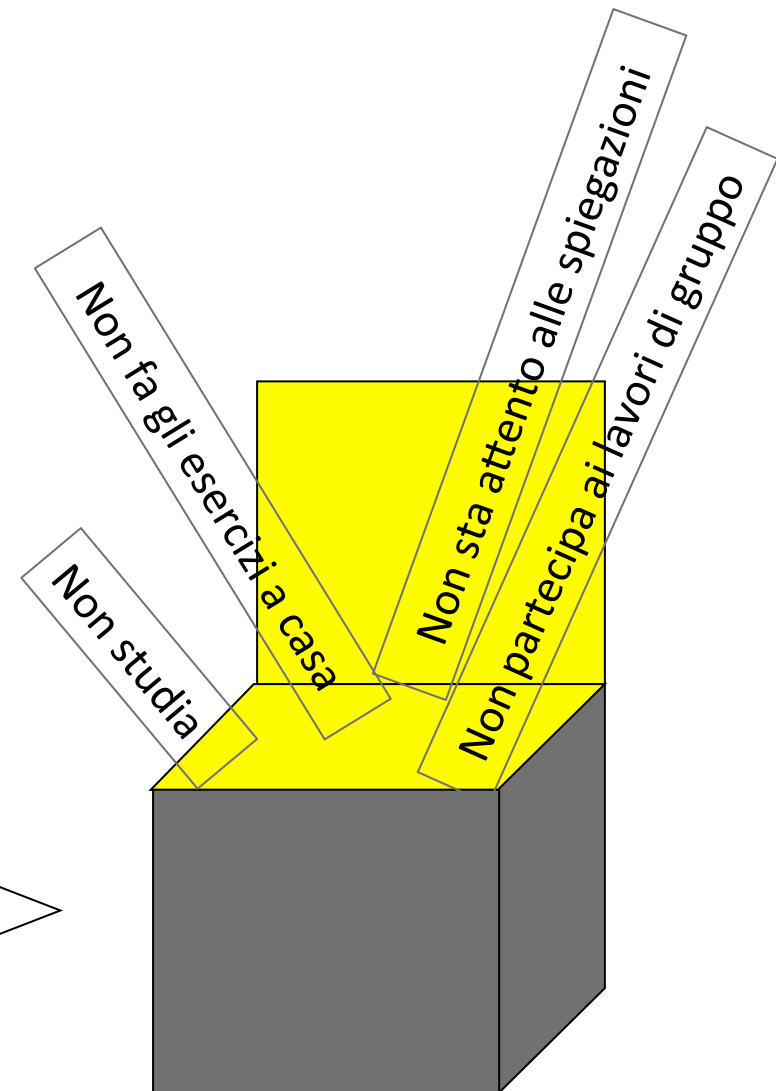
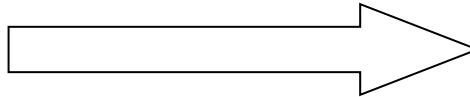
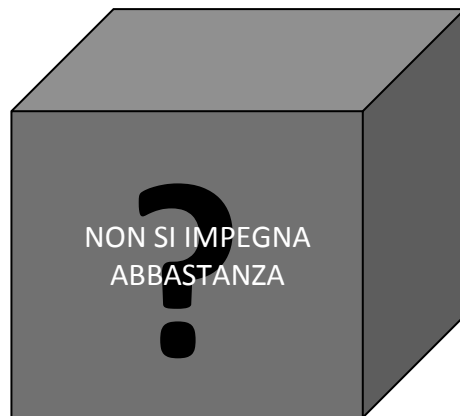
Non studia

Non fa gli esercizi a casa

Non sta attento alle spiegazioni

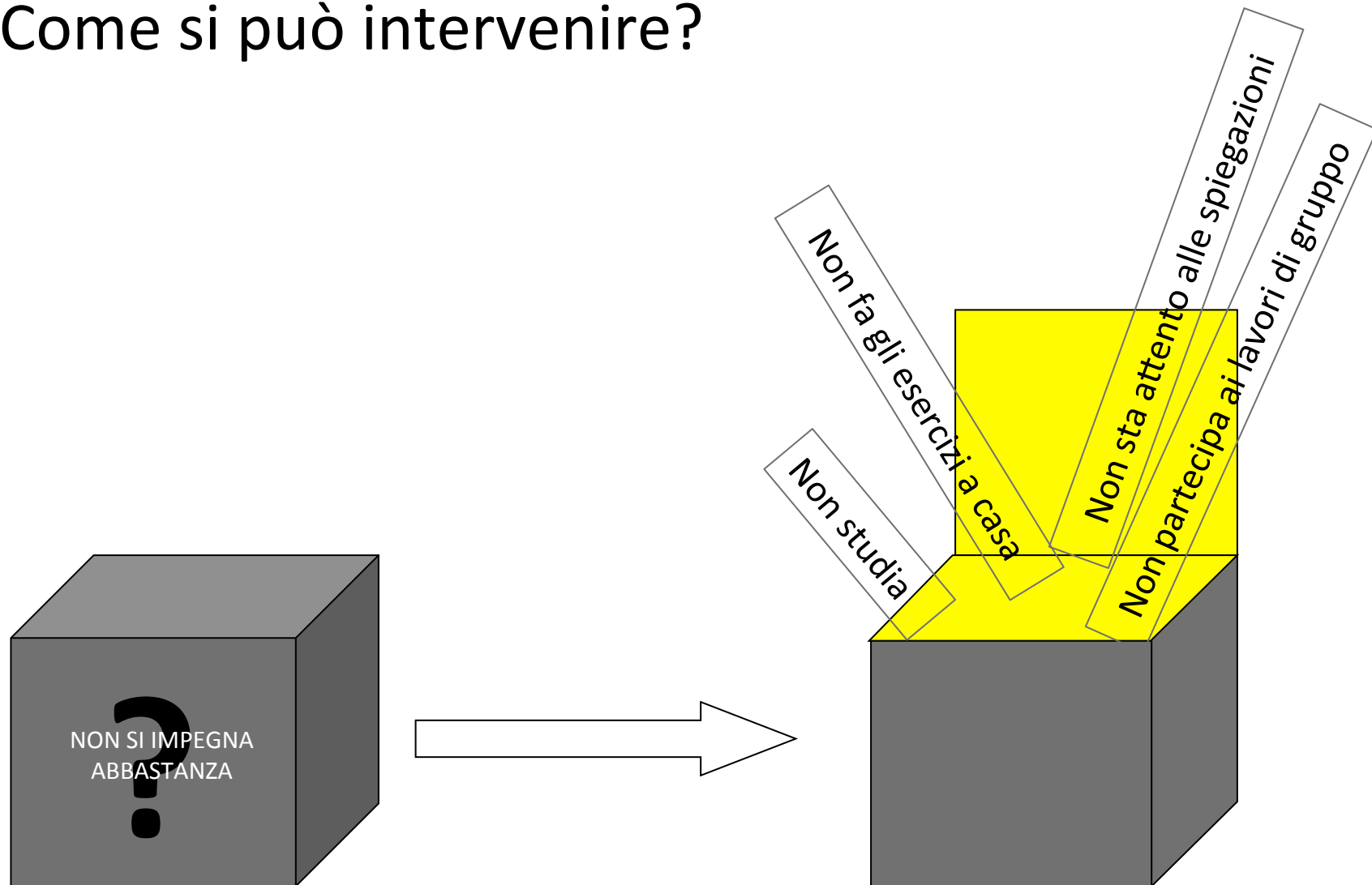
Non partecipa ai lavori di gruppo

ALTRO?



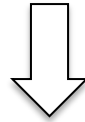
- Cosa vuol dire?
- Da cosa si vede?

- Come si può intervenire?

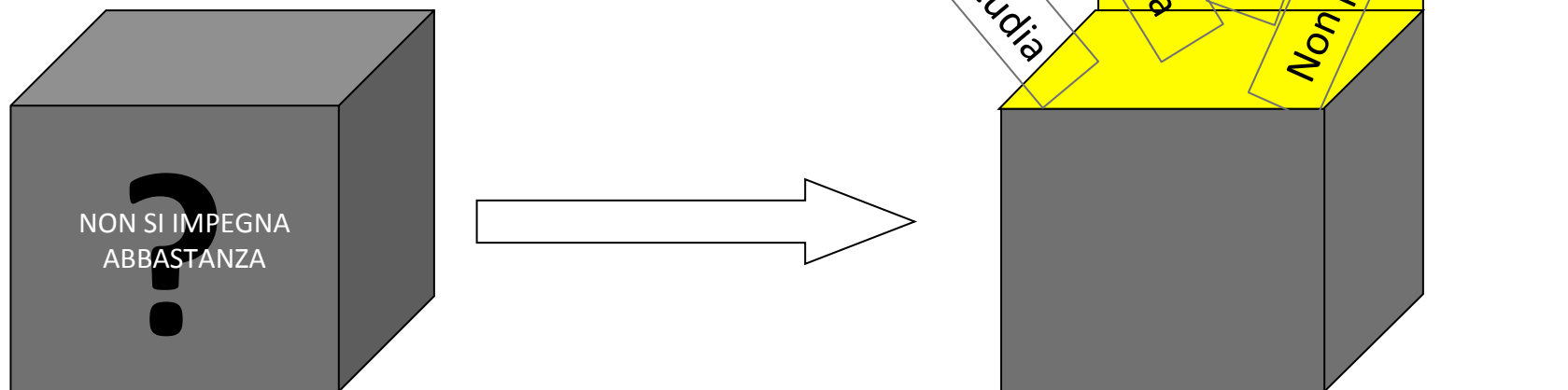


- Cosa vuol dire?
- Da cosa si vede?

- Come si può intervenire?

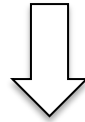


- Quali possono essere le cause?



- Cosa vuol dire?
- Da cosa si vede?

- Come si può intervenire?



- Quali possono essere le cause?

- Scarsa motivazione
- Scarsa determinazione
- Scarso senso di auto-efficacia
- Idea distorta del successo in matematica
- ...

...i motivi possono essere i più vari, e solo a partire dai motivi posso progettare azioni mirate

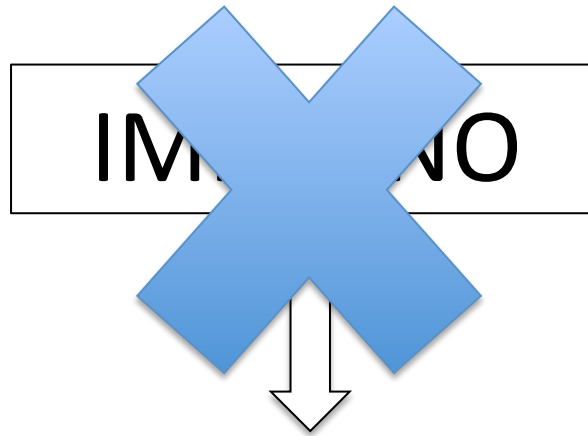
Un passaggio importante

IMPEGNO



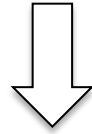
**ASSUNZIONE DELLA RESPONSABILITÀ
DELL'APPRENDIMENTO**

L'insegnante può fare molto per
favorirla



ASSUNZIONE DELLA RESPONSABILITÀ
DELL'APPRENDIMENTO

L'insegnante può fare molto per
favorirla



**Lavorare sulle condizioni che rendono possibile
l'assunzione della responsabilità dell'apprendimento**

ASSUNZIONE DELLA RESPONSABILITÀ
DELL'APPRENDIMENTO

NON È PORTATO

NON S'IMPEGNA ABBASTANZA

NON CAPISCE

USA UN METODO DI STUDIO SBAGLIATO

HA LACUNE DI BASE

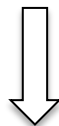
HA UN ATTEGGIAMENTO NEGATIVO
VERSO LA MATEMATICA



NON CAPISCE



NON HA CAPITO *QUALCOSA*?



DIFFICOLTÀ LOCALI

DIFFICOLTÀ DIFFUSE



NON CAPISCHE



SEMBRA NON CAPIRE *IN GENERALE?*

Non ragiona? Cioè non utilizza la razionalità matematica?

Ha lacune di base che gli impediscono di fare i ragionamenti adeguati?

Cosa vuol dire per lui/lei 'capire'? E quindi in quali direzioni si impegna, quali obiettivi si pone quando studia, quando segue la lezione ecc.?

Si rifiuta di ragionare? O comunque rinuncia a ragionare? (ad esempio risponde a caso?)

Sono le possibili cause che sono importanti, perché sono quelle che ci danno indicazioni per il recupero.

**NON SCE**

Non ragiona? Cioè non utilizza la razionalità matematica?

Ha lacune di base che gli impediscono di fare i ragionamenti adeguati?

Cosa vuol dire per lui/lei 'capire'? E quindi in quali direzioni si impegna, quali obiettivi si pone quando studia, quando segue la lezione ecc.?

Si rifiuta di ragionare? O comunque rinuncia a ragionare? (ad esempio risponde a caso?)

NON È PORTATO

NON S'IMPEGNA ABBASTANZA

NON CAPISCE

USA UN METODO DI STUDIO SBAGLIATO

HA LACUNE DI BASE

HA UN ATTEGGIAMENTO NEGATIVO
VERSO LA MATEMATICA

USA UN METODO DI STUDIO SBAGLIATO

Ad esempio:

- studia a memoria
- non si pone domande quando studia
- non si rende conto che per comprendere alcune cose bisogna conoscerne altre
- ...

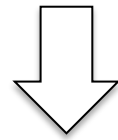
Da quali comportamenti si deduce?

- Alcuni direttamente osservabili: quali?
- Alcuni riportati dallo studente: studia a memoria, senza carta e penna, senza porsi domande,...

USA UN METODO DI STUDIO SBAGLIATO

Ad esempio:

- studia a memoria
- non si pone domande quando studia
- non si rende conto che per comprendere alcune cose bisogna conoscerne altre
- ...



più in generale...

Non regola i propri comportamenti sulle **caratteristiche della matematica**:

- L'organizzazione della matematica: assiomi, teoremi, definizioni, convenzioni, ...
- I processi cruciali della matematica
- La specificità del linguaggio matematico e sue funzioni
- La specificità della razionalità matematica

Possibili cause:

- non è consapevole di tali caratteristiche
- non sa come regolare i propri comportamenti in base a tali caratteristiche

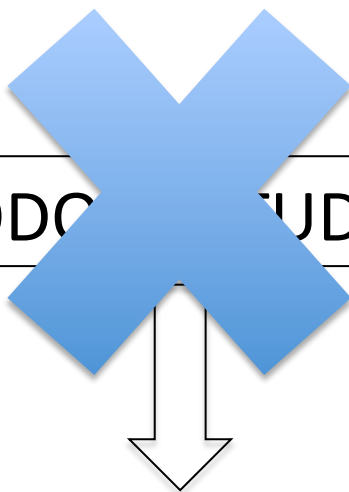
Non riguarda solo il metodo di studio:

- Come segue la lezione in classe
- Come affronta i compiti in classe
- ...

Non regola i propri comportamenti sulle **caratteristiche della matematica**:

- L'organizzazione della matematica: assiomi, teoremi, definizioni, convenzioni, ...
- I processi cruciali della matematica
- La specificità del linguaggio matematico e sue funzioni
- La specificità della razionalità matematica

USA UN METODO DI STUDIO SBAGLIATO



HA UN APPROCCIO INADEGUATO
ALLA MATEMATICA

NON È PORTATO

NON S'IMPEGNA ABBASTANZA

NON CAPISCE

USA UN METODO DI STUDIO SBAGLIATO

HA LACUNE DI BASE

HA UN ATTEGGIAMENTO NEGATIVO
VERSO LA MATEMATICA

Per poter passare da una diagnosi vaga e globale di 'lacune di base' ad una precisa e puntuale, esplicitando *quali* sono le lacune di base dell'allievo:

- è necessaria innanzitutto una riflessione sul concetto stesso di:
 - ✓ *lacune di base*, o di
 - ✓ *conoscenze di base*
- sapere, al di là della tradizione e delle pratiche didattiche più consolidate, quali sono le conoscenze in uscita dal segmento di scuola precedente effettivamente previste dagli ordinamenti attuali, e quindi le conoscenze che l'insegnante della scuola superiore può teoricamente assumere come acquisite;
- individuare quali di queste conoscenze sono effettivamente da considerarsi *di base*.



Importanza del raccordo

ATTIVITÀ B

Le lacune di base

GRUPPO: _____

Presentazione dell'attività

Per poter passare da una diagnosi vaga e globale di 'lacune di base' ad una precisa e puntuale, esplicitando *quali* sono le lacune di base dell'allievo, è necessaria innanzitutto una riflessione sul concetto stesso di 'lacune di base', o di 'conoscenze di base'.

Più precisamente è necessario:

- sapere, al di là della tradizione e delle pratiche didattiche più consolidate, quali sono le conoscenze in uscita dal segmento di scuola precedente effettivamente previste dagli ordinamenti attuali, e quindi le conoscenze che l'insegnante della scuola superiore può teoricamente assumere come acquisite;
- individuare quali di queste conoscenze sono effettivamente da considerarsi *di base*.

Questa attività di gruppo propone una riflessione su questi punti.

1. Cosa intendete al vostro livello di scuola per 'lacune di base'?

In altre parole, quand'è che una conoscenza a vostro parere è da considerarsi *di base*?

2. Per le conoscenze di matematica previste al termine della secondaria di primo grado il riferimento d'obbligo sono le Indicazioni nazionali del 2012.

Le I.N. per la matematica prevedono una premessa generale, *Obiettivi d'apprendimento, Traguardi per lo sviluppo delle competenze*.

Nell'allegato sono elencati gli **obiettivi d'apprendimento**, divisi per ambito. Gli ambiti sono 4: Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni.

2.1 Segnate con una crocetta quelli che a vostro parere coinvolgono conoscenze di base, secondo la definizione che ne avete dato al punto 1.

2.2 Evidenziate gli obiettivi su cui all'interno del gruppo non c'è accordo (cioè alcuni li considerano di base, altri no).

3. Questa attività vi ha fatto modificare alcune idee sulla diagnosi 'lacune di base'. O comunque vi ha dato l'occasione per fare riflessioni nuove? Se sì, quali e perché?

4. Esprimete di seguito le vostre conclusioni e sintetizzate eventuali dubbi o differenze di opinione che si sono manifestate all'interno del gruppo.

GRUPPO: _____

Dalle INDICAZIONI NAZIONALI 2012 per il 1° ciclo

Gli obiettivi d'apprendimento al termine della secondaria di 1° grado sono suddivisi in 4 ambiti:

- Numeri
- Spazio e figure
- Relazioni e funzioni
- Dati e previsioni

Numeri

- ☐ Eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ordinamenti e confronti tra i numeri conosciuti (numeri naturali, numeri interi, frazioni e numeri decimali), quando possibile a mente oppure utilizzando gli usuali algoritmi scritti, le calcolatrici e i fogli di calcolo e valutando quale strumento può essere più opportuno.
- ☐ Dare stime approssimate per il risultato di una operazione e controllare la plausibilità di un calcolo.
- ☐ Rappresentare i numeri conosciuti sulla retta.
- ☐ Utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica.
- ☐ Utilizzare il concetto di rapporto fra numeri o misure ed esprimerlo sia nella forma decimale, sia mediante frazione.
- ☐ Utilizzare frazioni equivalenti e numeri decimali per denotare uno stesso numero razionale in diversi modi, essendo consapevoli di vantaggi e svantaggi delle diverse rappresentazioni.
- ☐ Comprendere il significato di percentuale e saperla calcolare utilizzando strategie diverse.
- ☐ Interpretare una variazione percentuale di una quantità data come una moltiplicazione per un numero decimale.
- ☐ Individuare multipli e divisori di un numero naturale e multipli e divisori comuni a più numeri.
- ☐ Comprendere il significato e l'utilità del multiplo comune più piccolo e del divisore comune più grande, in matematica e in situazioni concrete.
- ☐ In casi semplici scomporre numeri naturali in fattori primi e conoscere l'utilità di tale scomposizione per diversi fini.
- ☐ Utilizzare la notazione usuale per le potenze con esponente intero positivo, consapevoli del significato, e le proprietà delle potenze per semplificare calcoli e notazioni.
- ☐ Conoscere la radice quadrata come operatore inverso dell'elevamento al quadrato.
- ☐ Dare stime della radice quadrata utilizzando solo la moltiplicazione.
- ☐ Sapere che non si può trovare una frazione o un numero decimale che elevato al quadrato dà 2, o altri numeri interi.
- ☐ Utilizzare la proprietà associativa e distributiva per raggruppare e semplificare, anche mentalmente, le operazioni.
- ☐ Descrivere con un'espressione numerica la sequenza di operazioni che fornisce la soluzione di un problema.
- ☐ Eseguire semplici espressioni di calcolo con i numeri conosciuti, essendo consapevoli del significato delle parentesi e delle convenzioni sulla precedenza delle operazioni.
- ☐ Esprimere misure utilizzando anche le potenze del 10 e le cifre significative.

Spazio e figure

- ☐ Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria).
- ☐ Rappresentare punti, segmenti e figure sul piano cartesiano.
- ☐ Conoscere definizioni e proprietà (angoli, assi di simmetria, diagonali, ...) delle principali figure piane (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari, cerchio).
- ☐ Descrivere figure complesse e costruzioni geometriche al fine di comunicarle ad altri.
- ☐ Riprodurre figure e disegni geometrici in base a una descrizione e codificazione fatta da altri.
- ☐ Riconoscere figure piane simili in vari contesti e riprodurre in scala una figura assegnata.
- ☐ Conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni in matematica e in situazioni concrete.
- ☐ Determinare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari, ad esempio triangoli, o utilizzando le più comuni formule.
- ☐ Stimare per difetto e per eccesso l'area di una figura delimitata anche da linee curve.
- ☐ Conoscere il numero π , e alcuni modi per approssimarlo.
- ☐ Calcolare l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza, conoscendo il raggio, e viceversa.
- ☐ Conoscere e utilizzare le principali trasformazioni geometriche e i loro invarianti.
- ☐ Rappresentare oggetti e figure tridimensionali in vario modo tramite disegni sul piano.
- ☐ Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali.
- ☐ Calcolare l'area e il volume delle figure solide più comuni e darne stime di oggetti della vita quotidiana.
- ☐ Risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure.

Relazioni e funzioni

- ☐ Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.
- ☐ Esprimere la relazione di proporzionalità con un'uguaglianza di frazioni e viceversa.
- ☐ Usare il piano cartesiano per rappresentare relazioni e funzioni empiriche o ricavate da tabelle, e per conoscere in particolare le funzioni del tipo $y=ax$, $y=a/x$, $y=ax^2$, $y=2^n$ e i loro grafici e collegare le prime due al concetto di proporzionalità.
- ☐ Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di primo grado.

Dati e previsioni

- ☐ Rappresentare insiemi di dati, anche facendo uso di un foglio elettronico. In situazioni significative, confrontare dati al fine di prendere decisioni, utilizzando le distribuzioni delle frequenze e delle frequenze relative. Scegliere ed utilizzare valori medi (moda, mediana, media aritmetica) adeguati alla tipologia ed alle caratteristiche dei dati a disposizione. Saper valutare la variabilità di un insieme di dati determinandone, ad esempio, il campo di variazione.
- ☐ In semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento, scomponendolo in eventi elementari disgiunti.
- ☐ Riconoscere coppie di eventi complementari, incompatibili, indipendenti.

NON È PORTATO

NON S'IMPEGNA ABBASTANZA

NON CAPISCE

USA UN METODO DI STUDIO SBAGLIATO

HA LACUNE DI BASE

HA UN ATTEGGIAMENTO NEGATIVO
VERSO LA MATEMATICA

INTERPRETAZIONE

RESPONSABILITÀ
DELL'INSEGNAMENTO



```
graph TD; A([RESPONSABILITÀ DELL'INSEGNAMENTO]) --> B[• Basso senso di auto-efficacia<br/>• Visione distorta della matematica];
```

- Basso senso di auto-efficacia
- Visione distorta della matematica

Azzurra

Trovare il perimetro di un rettangolo che ha la base di 12 cm e l'altezza di 8 cm.

Azzurra: 12×8

Ins.: 'Perché moltiplichi?'

Azzurra:

'Divido?'

Il tema di Azzurra:

“Alle elementari non ero una grossa cima in matematica, quindi in 3^a elementare vidi che non ero brava e chiusi così la mia testa, dicendo che questa non faceva per me.” Azzurra

Alessandro

Trovare l'area di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 126 cm, e l'altezza è $\frac{3}{4}$ della base.



...e non conclude

‘A questo punto non mi ricordo più la regola.’

Nicola

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

$$x^2 > -\frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$7x^2 + \sqrt{7} > 0$$

...e poi si blocca

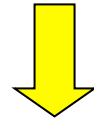
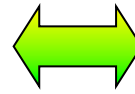
Nicola

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

- I.: *‘Perché invece di ricordarti cosa devi fare, non provi a risolverla da solo?’*
- N.: *‘La matematica è fatta di regole ben precise che vanno seguite, non ci si può inventare nulla. I problemi si risolvono seguendo quelle regole e io, ora, non mi ricordo come si risolvono le disequazioni.’*

Basso senso
di auto efficacia

Visione distorta
della matematica



La matematica
è incontrollabile

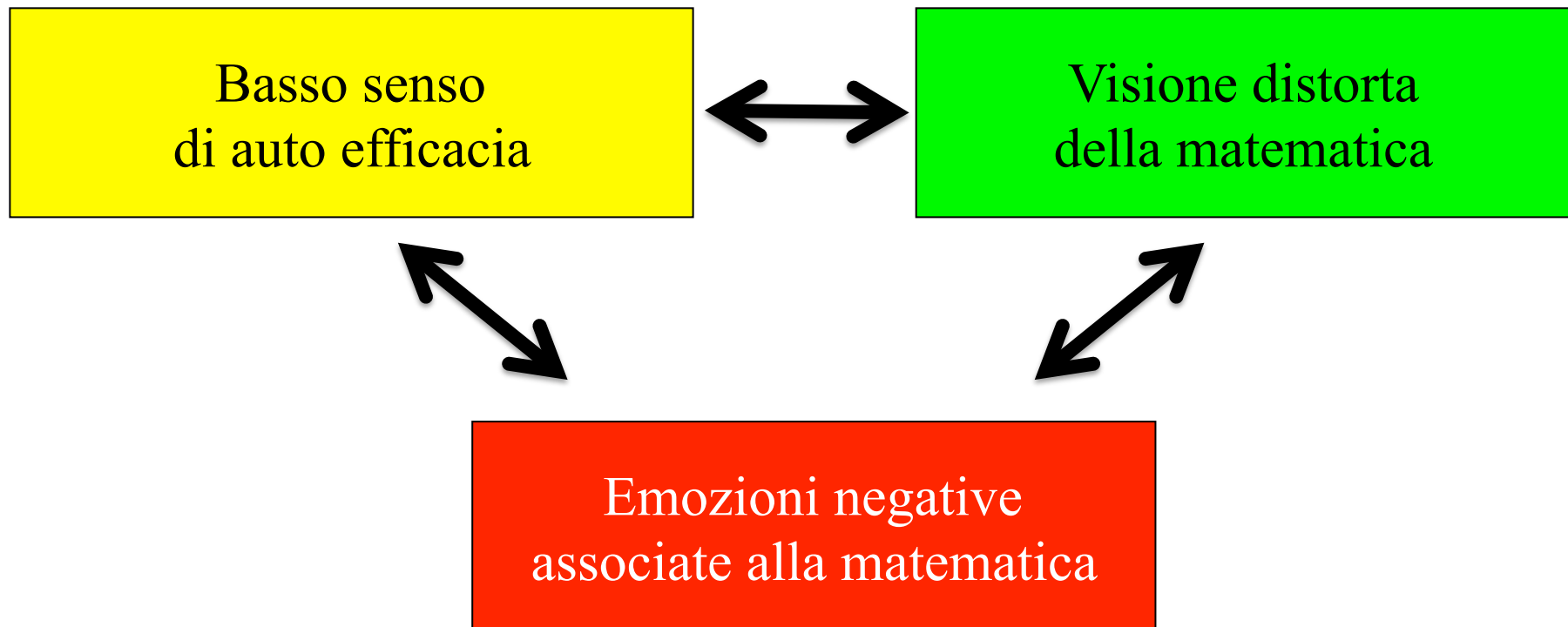


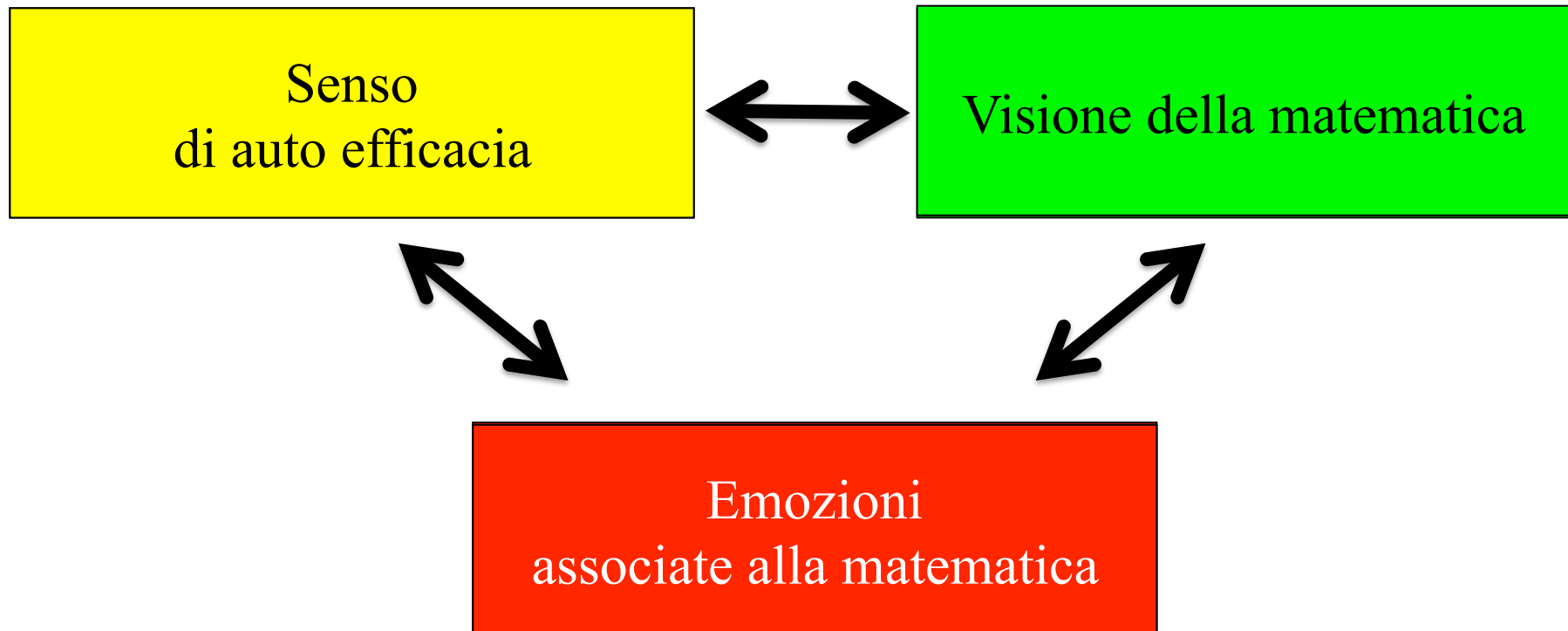
Rinuncia
a pensare

NON
RISPONDE

RISPONDE
A CASO

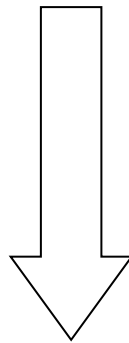
FATALISMO





**ATTEGGIAMENTO VERSO LA
MATEMATICA**

Atteggiamento positivo / negativo



PROFILI di atteggiamento negativo



POSITIVO

EMOZIONI
POSITIVE

EMOZIONI
NEGATIVE

VISIONE
RELAZIONALE

VISIONE
STRUMENTALE

VISIONE
RELAZIONALE

VISIONE
STRUMENTALE

Alta
auto-efficacia

Bassa
auto-efficacia

Alta
auto-efficacia

Bassa
auto-efficacia

Alta
auto-efficacia

Bassa
auto-efficacia

Alta
auto-efficacia

Bassa
auto-efficacia

POSITIVO

**NESSUN TEMA SU
1800!**

**EMOZIONI
POSITIVE**

**EMOZIONI
NEGATIVE**

**VISIONE
RELAZIONALE**

**VISIONE
STRUMENTALE**

**VISIONE
RELAZIONALE**

**VISIONE
STRUMENTALE**

**Alta
auto-efficacia**

**Bassa
auto-efficacia**

**Alta
auto-efficacia**

**Bassa
auto-efficacia**

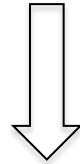
**Alta
auto-efficacia**

**Bassa
auto-efficacia**

**Alta
auto-efficacia**

**Bassa
auto-efficacia**

CONCLUSIONI



Nuova articolazione delle diagnosi, in modo
da renderle più puntuali e produttive

NON È PORTATO

NON S'IMPEGNA ABBASTANZA

NON CAPISCE

USA UN METODO DI STUDIO SBAGLIATO

HA LACUNE DI BASE

HA UN ATTEGGIAMENTO NEGATIVO
VERSO LA MATEMATICA

 NON È PORTATO

MANCATA ASSUNZIONE DELLA RESPONSABILITÀ
DELL'APPRENDIMENTO

 NON CAPISCE

APPROCCIO INADEGUATO ALLA MATEMATICA

HA LACUNE DI BASE

HA UN ATTEGGIAMENTO NEGATIVO
VERSO LA MATEMATICA

Da questa nuova organizzazione per le diagnosi segue la proposta di una:

Scheda diagnostica preliminare
(compilata dal docente di classe)

SCHEDA DIAGNOSTICA PRELIMINARE

(per il docente di classe)

Studente: _____ Classe: _____ Data: _____

☐ **Inadeguata assunzione della responsabilità dell'apprendimento**

Fa riferimento a comportamenti che in genere vengono attribuiti allo *scarso impegno*:

- non studia,
- non sta attento in classe,
- non porta i materiali,
- non fa la lezione per casa,
- ...

☐ **Approccio inadeguato alla matematica**

È il caso dello studente che 's'impegna', ma nella *direzione* sbagliata (cioè si pone un obiettivo sbagliato) o nel *modo* sbagliato (cioè si pone l'obiettivo giusto ma la strategia è sbagliata).

In altre parole lo studente non 'regola' i propri comportamenti sulle **caratteristiche della matematica** (la sua specifica organizzazione interna, articolata in assiomi, teoremi, definizioni, convenzioni; la sequenzialità; la specificità del linguaggio matematico e delle sue funzioni, la specificità della razionalità matematica,...), o perché non ne è consapevole, o perché non mette in atto strategie adeguate.

Ad esempio:

- utilizza un metodo di studio inadeguato (studia a memoria, non si pone domande quando studia, ...);
- non utilizza in modo adeguato il linguaggio matematico;
- non utilizza in modo adeguato la razionalità tipica della matematica;
- davanti a un problema tenta di recuperare 'la regola giusta'.

☐ **Atteggiamento negativo verso la matematica**

Lo studente ha una disposizione emozionale negativa (odio, noia, paura,...) verso la matematica, che lo porta a un rifiuto della disciplina, e quindi

- da un lato a scelte di *evitamento* (spiegare cosa intendo e adattare, oppure togliere),
- dall'altro a comportamenti quali:
 - ✓ rinunciare a rispondere
 - ✓ rispondere a caso.

☐ **Lacune di base**

Lo studente non possiede o non controlla in modo adeguato conoscenze e abilità *di base*, cioè conoscenze e abilità che sono indispensabili per la costruzione di conoscenze e abilità successive.

1. LA DIAGNOSI

2. L'INTERVENTO

I MODULI

Le difficoltà *locali*: l'interpretazione degli errori

INCONTRO DI MAGGIO

MODULO L

Dal mito dell'impegno alla responsabilità dell'apprendimento

MODULO R

Approccio inadeguato alla matematica

MODULO M

Le lacune di base

MODULO LB

L'atteggiamento negativo verso la matematica

MODULO AN



Rosetta Zan
Anna Baccaglini-Frank

Avere successo in Matematica

Strategie per l'inclusione
e il recupero

Risorse BES per
L'INSEGNANTE



Petrini

Approccio inadeguato alla matematica



MODULO M

- vogliono favorire un approccio alla matematica (anche nell'insegnamento...) rispettoso delle caratteristiche della disciplina
- in particolare vogliono far cogliere l'idea stessa di *definizione*, di *dimostrazione* e di *teorema*



- ATTIVITÀ PER LO STUDIO DI UNA DEFINIZIONE
- ATTIVITÀ PER LO STUDIO DI UNA DIMOSTRAZIONE
- ATTIVITÀ PER LO STUDIO DI UN TEOREMA



- vogliono promuovere una visione corretta della matematica (visione *relazionale* e non *strumentale*)

MATEMATICA STRUMENTALE

MATEMATICA RELAZIONALE

(Skemp, 1976)

regole

ricordare

esercizi

prodotti

fatti matematici

ragionare

problemi

processi

- vogliono promuovere una visione corretta della matematica (visione *relazionale* e non *strumentale*)

MATEMATICA STRUMENTALE

MATEMATICA RELAZIONALE

(Skemp, 1976)

regole

ricordare

esercizi

prodotti

fatti matematici

ragionare

problemi

processi

- Sono importanti i *perché*
- ...e in matematica ci sono tanti tipi di *perché*

GLI ASSIOMI



```
graph TD; A[GLI ASSIOMI] --> B[I TEOREMI]; C[LE DEFINIZIONI]; D[LE CONVENZIONI];
```

I TEOREMI

LE DEFINIZIONI

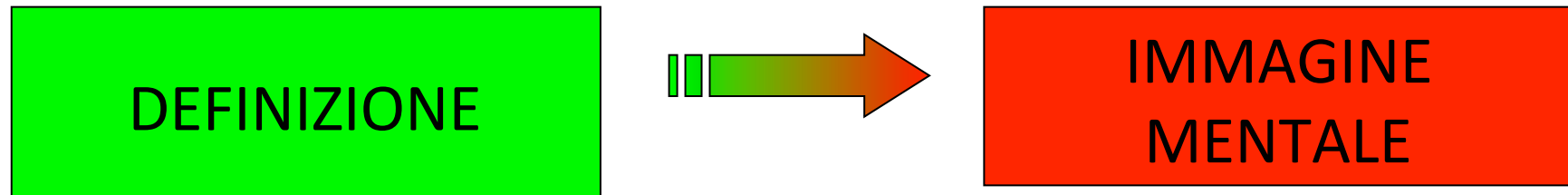
LE CONVENZIONI

Dopo aver visto la definizione e gli esempi fatti dall'insegnante, l'allievo si costruisce una

immagine mentale

di tale definizione...

...ed è a tale immagine mentale che ricorre quando deve risolvere problemi ecc.



DEFINIZIONE

Altezza: E' il segmento che esce da un vertice ed
perpendicolare al lato opposto

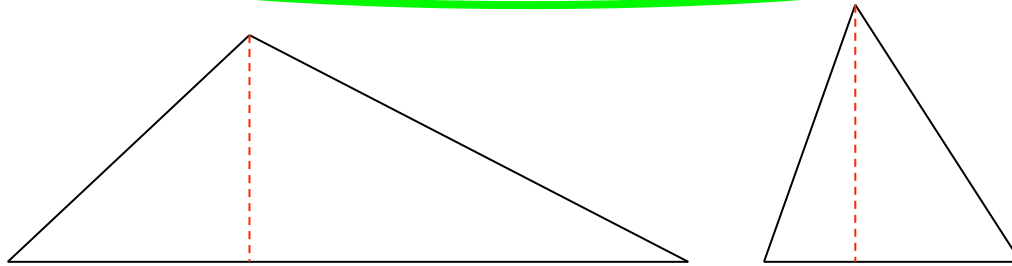
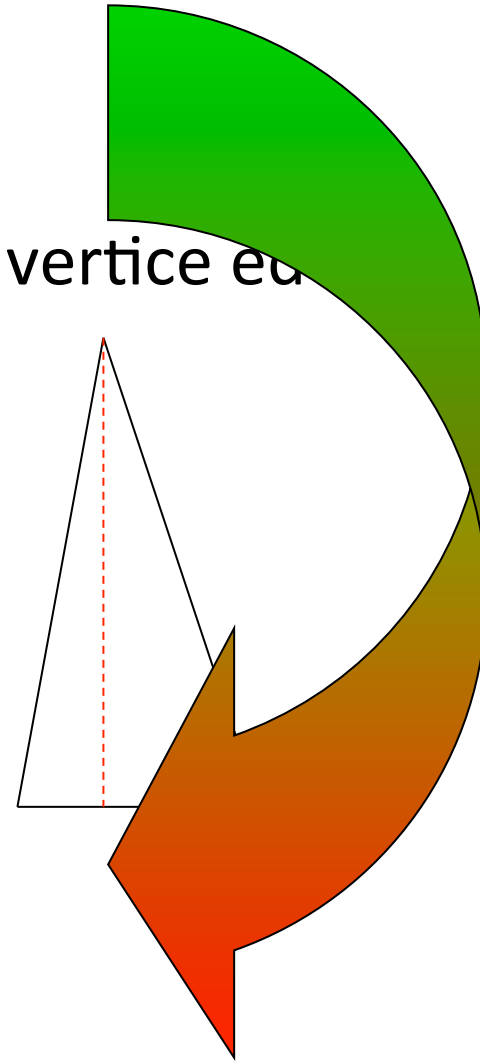


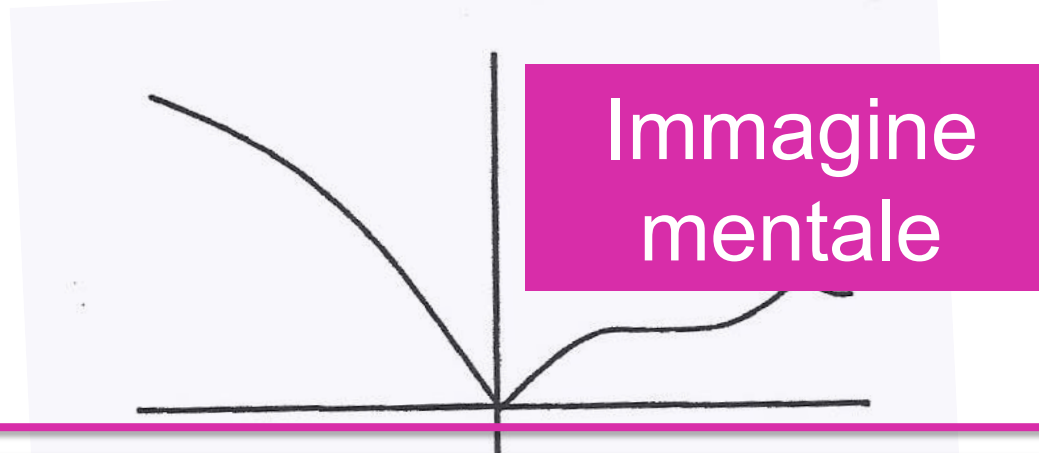
IMMAGINE
MENTALE

...è verticale



1. Funzione

1. Esiste una funzione in cui ogni numero diverso da 0 è associato al suo quadrato, e allo 0 è associato 1?
2. Esiste una funzione in cui ogni numero positivo è associato a 1, ogni numero negativo è associato a -1, e 0 è associato a 0?
3. Esiste una funzione il cui grafico è il seguente?



4. Secondo te cos'è una funzione?

Definizione

Molti studenti che alla domanda 4 danno una definizione corretta di funzione non la utilizzano per rispondere alle domande 1-3.

ALTRI MATERIALI:

- FACCIAMO IL PUNTO → vedi MODULO R
- QUESTIONARI PRIMA/DOPO → vedi MODULO R
- QUESTIONARIO SUL METODO DI STUDIO
- SCHEDA PER L'AUTOVALUTAZIONE DELLO STUDIO
- SCHEDA PER LA GESTIONE DEL TEMPO

Approccio inadeguato alla matematica



MODULO M

APPROCCIO ALLE DEFINIZIONI

APPROCCIO A DIMOSTRAZIONI E TEOREMI

ATTIVITÀ PER LO STUDIO DI UNA DEFINIZIONE

Numeri primi fra loro

Numeri razionali

Attività 2

Leggi con attenzione la seguente DEFINIZIONE:

Definizione: Due numeri interi si dicono **primi tra loro**, o **coprime**, se il loro M.C.D. è 1.

Ti sembra di aver capito la definizione?

Se non l'hai capita:

Ci sono simboli che non conosci? Quali?

Ci sono parole che non conosci? Quali?

Ci sono espressioni che non capisci? Quali?

Rileggi la definizione e scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio:

Se pensi di aver capito la definizione data:

Scrivi due numeri che sono primi fra loro:

Scrivi due numeri che non sono primi fra loro:

Svolgi ora gli esercizi che seguono, che riguardano la definizione di numeri primi fra loro.

Attenzione! Tutte le volte che hai un dubbio rileggi la DEFINIZIONE!

Esercizio 2.1

Martina dice: 11 e 10 non sono primi fra loro perché 10 non è un numero primo.

Andrea dice: 11 e 10 sono primi tra loro perché 11 è primo.

Marco dice: 11 e 10 non sono primi tra loro, però sono coprimi.

A chi dai ragione?

Perché?

Esercizio 2.2

Francesco dice: Due numeri interi sono primi tra loro se non hanno altri divisori in comune oltre l'1.

Angela dice: Non è vero. La definizione dice che sono primi quando il loro massimo comun divisore è uguale a 1.

A chi dai ragione?

Perché?

Adesso prova a scrivere qui sotto la definizione di *numeri primi fra loro*, senza guardare la definizione scritta all'inizio:

Attività 1 Leggi con attenzione la seguente DEFINIZIONE:

Definizione 1: Un numero si dice **razionale** se si può scrivere come rapporto di due numeri interi, cioè se si può scrivere come m/n , con m e n interi.

Ti sembra di aver capito la definizione?

Se non l'hai capita:

Ci sono simboli che non conosci? Quali?

Ci sono parole che non conosci? Quali?

Ci sono espressioni che non capisci? Quali?

Rileggi la definizione e scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio:

Se pensi di aver capito la definizione data:

Scrivi 4 numeri razionali:

Scrivi 4 numeri non razionali:

Svolgi ora gli esercizi che seguono, che riguardano la definizione di numero razionale.

Attenzione! Tutte le volte che hai un dubbio rileggi la DEFINIZIONE!

Esercizio 1.1

Andrea dice: 7 non è un numero razionale perché è un solo numero e non è un rapporto.

Ilaria dice: 7 è razionale perché si può scrivere come rapporto di due interi: 7 e 1.

A chi dai ragione?

Perché?

Esercizio 1.2

Silvia dice: $3,14$ è razionale perché si può scrivere come $314/100$.

Valerio dice: $3,14$ non è razionale perché è un numero con la virgola.

A chi dai ragione?

Perché?

Esercizio 1.3

Barbara dice: $\sqrt{25}$ non è un numero razionale perché c'è la radice quadrata.

Francesco dice: $\sqrt{25}$ è un numero razionale perché è uguale a 5, che è razionale.

A chi dai ragione e perché?

Esercizio 1.4

Alice dice: $\sqrt{3}/2$ è razionale perché è il rapporto di due numeri.

Sei d'accordo con Alice?

Spiega perché.

Adesso prova a scrivere qui sotto la definizione di *numero razionale*, senza guardare la definizione scritta all'inizio:

ATTIVITÀ PER LO STUDIO DI UNA DIMOSTRAZIONE / DI UN TEOREMA

TEOREMA: $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale

TEOREMA: La somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4.

TEOREMA DEL RESTO: Sia $P(x)$ un polinomio di grado maggiore o uguale a 1, e $B(x) = x - c$.
Il resto della divisione del polinomio $P(x)$ per il polinomio $B(x)$ è $P(c)$.

Qui di seguito sono riportati l'ENUNCIATO e la DIMOSTRAZIONE di un teorema.

Leggi entrambi molto attentamente.

TEOREMA: $\sqrt{2}$ è un numero irrazionale, cioè non si può scrivere come rapporto fra due numeri interi.

Qual è l'**enunciato** del teorema?

Ti sembra di averlo capito?

Se non l'hai capito:

Ci sono simboli che non conosci? Quali?

Ci sono parole che non conosci? Quali?

Ci sono espressioni che non capisci? Quali?

Rileggi l'enunciato e scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio:

DIMOSTRAZIONE

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n tali che:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ segue che $m^2 = 2n^2$.

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.

6. Quindi n deve essere dispari.

DIMOSTRAZIONE

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$, cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 è pari.

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

13. Quindi il teorema è dimostrato.

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

1. Dimostriamo per assurdo.



- a) Cosa vuol dire dimostrare per assurdo?
- b) Hai visto altre dimostrazioni per assurdo?

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ segue che $m^2 = 2n^2$.

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.

6. Quindi n deve essere dispari.

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$



c) Perché al punto 2 della dimostrazione si scrive $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$?, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ segue che $m^2 = 2n^2$.

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.

6. Quindi n deve essere dispari.

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.



d) Perché al punto 3 della dimostrazione si dice che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro?

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.

6. Quindi n deve essere dispari.

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

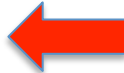
1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ segue che $m^2 = 2n^2$. 

e) Perché al punto 4 della dimostrazione si scrive che $m^2=2n^2$?

6. Quindi n deve essere dispari.

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ segue che $m^2 = 2n^2$.

5. Poiché m^2 è pari, anche m è pari.



f) Perché se m^2 è pari, anche m è pari?

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

1. Dimostriamo per assurdo.

2. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale allora esisterebbero due numeri interi m e n

tali che: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

3. Osserviamo che si può sempre supporre che m e n siano primi tra loro, cioè

che la frazione $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

4. Dall'uguaglianza $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ segue che $m^2 = 2n^2$.

g) Perché n deve essere dispari?

6. Quindi n deve essere dispari.



RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.



h) Perché ne si può scrivere $m=2k$?

i) Perché si deduce che $m^2=4k^2$?

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

13. Quindi il teorema è dimostrato.

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$, cioè $n^2 = 2k^2$.



I) Perché si scrive che $2n^2=4k^2$?

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

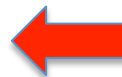
13. Quindi il teorema è dimostrato.

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$, cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 è pari.



m) Perché si afferma che n^2 è pari?

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

13. Quindi il teorema è dimostrato.

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$, cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 è pari.

10. Quindi anche n è pari.



n) Perché si deduce che anche n è pari ?

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

13. Quindi il teorema è dimostrato.

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$, cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 è pari.

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.



o) Perché si afferma che n doveva essere dispari?

13. Quindi il teorema è dimostrato.

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$, cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 è pari.

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.



p) Perché si afferma che si è arrivati a un assurdo?

RISPONDI ORA ALLE DOMANDE

7. D'altra parte se poniamo $m = 2k$ segue che $m^2 = 4k^2$.

8. Quindi: $2n^2 = 4k^2$, cioè $n^2 = 2k^2$.

9. Da cui segue che n^2 è pari.

10. Quindi anche n è pari.

11. Ma avevamo visto che n doveva essere dispari.

12. Quindi siamo arrivati ad un assurdo.

13. Quindi il teorema è dimostrato.



q) Perché si afferma che il teorema è dimostrato?

Ecco alcuni commenti al teorema dato sopra, leggili attentamente e rispondi alla domanda finale:

Ludovico dice : “Secondo me il teorema non è dimostrato, non vedo infatti cosa c’entri che n sia contemporaneamente pari e dispari con il fatto che $\sqrt{2}$ sia irrazionale”

Mirko dice : “Il teorema è falso, perché $\sqrt{2}$ si può scrivere come $\frac{m}{n}$

Infatti con la calcolatrice ho trovato che $\sqrt{2}$ è uguale a 1,4142135623, quindi è uguale alla frazione $\frac{14142135623}{10000000000}$.

Nadia dice : “Il teorema è falso, perché $\sqrt{2}$ si può scrivere come $\frac{m}{n}$

Basta prendere $n = \sqrt{2}$ $m = 2$

e così $\frac{m}{n} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Cosa pensi di tali commenti?

Qui di seguito sono riportati l'ENUNCIATO e la DIMOSTRAZIONE di un teorema.
Leggi entrambi molto attentamente.

TEOREMA: La somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4.

Qual è l'**enunciato** del teorema?

Ti sembra di averlo capito?

Se non l'hai capito:

Ci sono simboli che non conosci? Quali?

Ci sono parole che non conosci? Quali?

Ci sono espressioni che non capisci? Quali?

Rileggi l'enunciato e scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio:

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$
4. Possiamo inoltre scrivere $n = 2k + 1$
5. quindi $m = 2k + 3$
6. Allora $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$
7. Quindi $m + n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.

Pensi di aver capito la **dimostrazione**?

Ci sono passi che non sono chiari? Quali? Cos'è che non ti è chiaro?

Scrivi di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio la dimostrazione:

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi



Cosa vuol dire che due numeri dispari sono consecutivi (vedi punto 1)?

5. quindi $m=2k+3$

6. Allora $m+n=(2k+1)+(2k+3)=4(k+1)$

7. Quindi $m+n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$

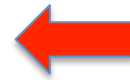


Perché si dice che si può supporre $n < m$ (vedi punto 2)?

5. quindi $m = 2k + 3$
6. Allora $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$
7. Quindi $m + n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.

Dimostrazione:


1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$



Perché $m = n + 2$? (vedi punto 3)

6. Allora $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$
7. Quindi $m + n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$
4. Possiamo inoltre scrivere $n = 2k + 1$ 

Perché si può scrivere $n = 2k + 1$ (vedi punto 4)?

7. Quindi $m + n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato.


Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$
4. Possiamo inoltre scrivere $n = 2k + 1$
5. quindi $m = 2k + 3$




Perché si scrive $m = 2k + 3$ (vedi punto 5)?

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$
4. Possiamo inoltre scrivere $n = 2k + 1$
5. quindi $m = 2k + 3$
6. Allora $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$ 

Perché $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$ (vedi punto 6)?

Dimostrazione:

1. Siano n e m due numeri dispari consecutivi
2. Possiamo supporre $n < m$
3. e quindi $m = n + 2$
4. Possiamo inoltre scrivere $n = 2k + 1$
5. quindi $m = 2k + 3$
6. Allora $m + n = (2k + 1) + (2k + 3) = 4(k + 1)$
7. Quindi $m + n$ è divisibile per 4, e il teorema è dimostrato. 

Perché si dice che $m + n$ è divisibile per 4 (vedi punto 7)?

Perché il teorema è dimostrato (vedi punto 7)?

Ecco alcuni commenti al teorema dato sopra, leggili attentamente e rispondi alla domanda finale:

TEOREMA: La somma di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4.

Federico dice: “Secondo me il teorema è falso, infatti due numeri non possono essere dispari e consecutivi nello stesso tempo: infatti se sono consecutivi uno è pari e l’altro è dispari.”

Giorgia dice: “Secondo me la dimostrazione non dimostra l’enunciato, ma dimostra che: *se m e n sono dispari consecutivi allora $n+m$ è multiplo di 4.*”

Anna dice: “Secondo me il teorema è falso. Infatti 27 e 29 sono due dispari consecutivi ma la loro somma è 56 che è divisibile per 8.”

Cosa pensi di tali commenti?

PARTE 1: L'ENUNCIATO

Qui di seguito è riportato l'ENUNCIATO di un teorema importante: il teorema del resto.

Leggilo con attenzione.

Teorema del resto

Sia $P(x)$ un polinomio di grado maggiore o uguale a 1, e $B(x) = x - c$.
Il resto della divisione del polinomio $P(x)$ per il polinomio $B(x)$ è $P(c)$.

Ti sembra di aver capito l'enunciato del teorema?

Se non l'hai capito:

Ci sono simboli che non conosci? Quali?

Ci sono parole che non conosci? Quali?

Ci sono espressioni che non capisci? Quali?

Rileggi l'enunciato e scrivi qui di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio:

Rispondi ora alle seguenti domande:

1. Quali sono le ipotesi?

2. Qual è la tesi?

3. Cosa sta a indicare $P(c)$?

4. Considera il caso in cui:

$$P(X) = 2x - 1$$

$$B(X) = x - 3$$

$P(x)$ e $B(x)$ soddisfano le ipotesi del Teorema del resto?

☐ sì ☐ no

Perché?

Se hai risposto sì:

Quanto vale c ?

Calcola $P(c) =$

Cosa ti permette di concludere il teorema?

La divisione del polinomio $P(x)$ per il polinomio $B(x)$ è riportata qui sotto

$2x - 1$	$x - 3$
$-2x + 6$	2
5	

- Qual è il resto?
- $P(c)$ è uguale al resto che hai trovato?

Teorema del resto

Sia $P(x)$ un polinomio di grado maggiore o uguale a 1, e $B(x) = x - c$.

Il resto della divisione del polinomio $P(x)$ per il polinomio $B(x)$ è $P(c)$.

7. Considera il caso in cui:

$$P(X) = 6x^2 - x + 3$$

$$B(X) = 2x - 1$$

$P(x)$ e $B(x)$ soddisfano le ipotesi del Teorema del resto?

☐ sì ☐ no

Perché?

Se hai risposto sì:

Quanto vale c ?

Calcola $P(c) =$

Cosa ti permette di concludere il teorema?

La divisione del polinomio $P(x)$ per il polinomio $B(x)$ è riportata qui sotto:

$6x^2 - x + 3$	$2x - 1$
$-6x^2 + 3x$	$3x + 1$
$2x + 3$	
$-2x + 1$	
4	

Teorema del resto

Sia $P(x)$ un polinomio di grado maggiore o uguale a 1, e $B(x) = x - c$.

Il resto della divisione del polinomio $P(x)$ per il polinomio $B(x)$ è $P(c)$.

- Qual è il resto?
- $P(c)$ è uguale al resto che hai trovato?

Parte 2: La DIMOSTRAZIONE

Leggi ora con attenzione la DIMOSTRAZIONE del Teorema del resto.

Per facilitare la comprensione abbiamo numerato i passaggi.

DIMOSTRAZIONE:

1. Per il *Teorema della divisione con resto tra due polinomi*, dati due polinomi $P(X)$ e $B(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$P(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

e $R(x)$, il resto, è un polinomio di grado strettamente minore di $B(x)$.

2. Nel nostro caso:

$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x)$$

3. Quindi $R(x)$ ha grado 0, cioè è una costante, che posso indicare con R .

4. Ponendo $x=c$ si ottiene:

$$P(c) = Q(c)(c - c) + R$$

5. Quindi:

$$P(c) = R$$

6. Il teorema è dimostrato.

Pensi di aver capito la dimostrazione?

Ci sono passi che non sono chiari? Quali? Cos'è che non ti è chiaro?

Scrivi di seguito tutto quello che vorresti chiedere al professore per capire meglio la dimostrazione:

DIMOSTRAZIONE:

1. Per il *Teorema della divisione con resto tra due polinomi*, dati due polinomi $P(X)$ e $B(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$P(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

e $R(x)$, il resto, è un polinomio di grado strettamente minore di $B(x)$.



Se divido ad esempio il polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$ per il polinomio $B(x) = x^2 - 1$ quale grado avrà il resto?

Di seguito è riportata la divisione fra i due polinomi

$2x^3 + 3x^2 + \quad + 1$	$x^2 - 1$
$-2x^3 + \quad + 2x$	$2x + 3$
<hr/>	
$3x^2 + 2x + 1$	
$-3x^2 \quad + 3$	
<hr/>	
$2x + 4$	

In questo caso qual è il polinomio $R(x)$, cioè il polinomio resto?

Qual è il polinomio $Q(x)$, cioè il polinomio quoziente?

Scrivi in questo caso l'uguaglianza

$$P(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

Calcola $Q(x)B(x) + R(x)$ e verifica che effettivamente il risultato è uguale al polinomio $P(x)$.

DIMOSTRAZIONE:

1. Per il *Teorema della divisione con resto tra due polinomi*, dati due polinomi $P(X)$ e $B(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$P(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

e $R(x)$, il resto, è un polinomio di grado strettamente minore di $B(x)$.

2. Nel nostro caso:

$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x)$$



- b) Perché al punto 2 si scrive:

$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x)?$$

4. Ponendo $x=c$ si ottiene:

$$P(c) = Q(c)(c - c) + R$$

5. Quindi:

$$P(c) = R$$

6. Il teorema è dimostrato.

DIMOSTRAZIONE:

1. Per il *Teorema della divisione con resto tra due polinomi*, dati due polinomi $P(X)$ e $B(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:
$$P(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

e $R(x)$, il resto, è un polinomio di grado strettamente minore di $B(x)$.

2. Nel nostro caso:
$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x)$$

3. Quindi $R(x)$ ha grado 0, cioè è una costante, che posso indicare con R .



c) Cosa vuol dire che $R(x)$ ha grado 0 (vedi punto 3)?

d) Perché al punto 3 si dice che $R(x)$ è una costante?

e) Cosa vuol dire che $R(x)$ è una costante?

6. Il teorema è dimostrato.

DIMOSTRAZIONE:

1. Per il *Teorema della divisione con resto tra due polinomi*, dati due polinomi $P(X)$ e $B(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:
$$P(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

e $R(x)$, il resto, è un polinomio di grado strettamente minore di $B(x)$.

2. Nel nostro caso:
$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x)$$

3. Quindi $R(x)$ ha grado 0, cioè è una costante, che posso indicare con R .

4. Ponendo $x=c$ si ottiene:
$$P(c) = Q(c)(c - c) + R$$



f) Perché al punto 4 si dice che $P(c) = Q(c)(c - c) + R$?

$$P(c) = R$$

6. Il teorema è dimostrato.

DIMOSTRAZIONE:

1. Per il *Teorema della divisione con resto tra due polinomi*, dati due polinomi $P(X)$ e $B(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$P(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

e $R(x)$, il resto, è un polinomio di grado strettamente minore di $B(x)$.

2. Nel nostro caso:

$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x)$$

3. Quindi $R(x)$ ha grado 0, cioè è una costante, che posso indicare con R .

4. Ponendo $x=c$ si ottiene:

$$P(c) = Q(c)(c - c) + R$$

5. Quindi:

$$P(c) = R$$



g) Perché al punto 5 si deduce che $P(c)=R$?

DIMOSTRAZIONE:

1. Per il *Teorema della divisione con resto tra due polinomi*, dati due polinomi $P(X)$ e $B(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$P(x) = Q(x)B(x) + R(x)$$

e $R(x)$, il resto, è un polinomio di grado strettamente minore di $B(x)$.

2. Nel nostro caso:

$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x)$$

3. Quindi $R(x)$ ha grado 0, cioè è una costante, che posso indicare con R .

4. Ponendo $x=c$ si ottiene:

$$P(c) = Q(c)(c - c) + R$$

5. Quindi:

$$P(c) = R$$

h) Perché al punto 6 si conclude che il teorema è dimostrato?

6. Il teorema è dimostrato.



DIMOSTRAZIONE:

1. Per il *Teorema della divisione con resto* tra $P(x)$ e $B(x)$ esistono due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che $P(x) = Q(x)B(x) + R(x)$ e $R(x)$, il resto, è un polinomio di grado strettamente minore di $B(x)$.
2. Nel nostro caso:
$$P(x) = Q(x)(x - c) + R(x)$$
3. Quindi $R(x)$ ha grado 0, cioè
4. Ponendo $x=c$ si ottiene:
$$P(c) = Q(c)(c - c) + R$$
5. Quindi:
$$P(c) = R$$
6. Il teorema è dimostrato.

7. Considera il caso in cui:

$$P(x) = 6x^2 - x + 3$$

$$B(x) = 2x - 1$$

$P(x)$ e $B(x)$ soddisfano le ipotesi del Teorema del resto?

☐ sì ☐ no

Perché?

i) Se il polinomio $B(x)$ invece che $x-c$ fosse $ax-c$, dove a è un numero diverso da 1, cosa cambierebbe nei passaggi della dimostrazione?

Ad esempio se $B(x)$ fosse $2x-c$?

l) Controlla cosa hai risposto alla domanda 7 della prima parte.

Cambieresti la tua risposta?

L'attività per lo studio di un teorema...

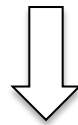
- Può essere utilizzata anche al di fuori del recupero
- Per far lavorare gli studenti su teoremi e dimostrazioni significativi
 - L'insegnante non 'fa' la dimostrazione alla lavagna
 - Consegna agli studenti (a gruppi) il foglio con l'enunciato, la dimostrazione e le attività descritte
 - Conclude tirando le fila attraverso un confronto fra le varie risposte

OSSERVAZIONE 1

- Queste attività (definizioni e teoremi) vogliono far capire come si affronta la matematica...
- ...ponendo le domande che si fa l'esperto quando studia
- Con il tempo lo studente dovrebbe imparare a porsi da solo le domande 'giuste'
- ...cioè dovrebbe imparare cosa significa 'comprendere' in matematica

OSSERVAZIONE 2

- Ogni attività di fatto propone al suo interno una serie di ‘problemi’ che mettono in gioco le conoscenze che lo studente dovrebbe possedere, ma che spesso:
 - non possiede, oppure
 - non riconosce come importanti
 - ...in ogni caso non utilizza



- Queste attività quindi sono utili anche per sviluppare:
 - una diversa consapevolezza dell'importanza delle conoscenze possedute
 - le capacità di **auto-valutazione** dello studente

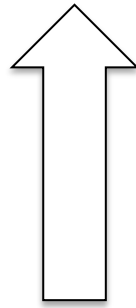
Dal mito dell'impegno alla responsabilità
dell'apprendimento



MODULO R

- Scheda 'Facciamo il punto'
- Il contratto didattico
- Questionario prima/dopo
- Questionario sull'atteggiamento nei confronti delle difficoltà

- Perché lo studente si assuma tale responsabilità devono essere verificate alcune condizioni



**La responsabilità dell'apprendimento:
ovvero, oltre il mito dell'impegno**

- Perché lo studente si assuma tale responsabilità devono essere verificate alcune condizioni

L'allievo deve credere nella necessità di un cambiamento.

L'allievo deve credere nella possibilità di un cambiamento.

L'allievo deve investire le sue risorse in modo mirato e continuo.

Cosa può fare l'insegnante:

- in generale favorire il processo di *autovalutazione* da parte dello studente
- essere chiaro e trasparente nei criteri di valutazione utilizzati

L'allievo deve credere nella necessità di un cambiamento.

L'allievo deve credere nella possibilità di un cambiamento.

L'allievo deve investire le sue risorse in modo mirato e continuo.

Cosa può fare l'insegnante:

- in generale favorire il processo di *autovalutazione* da parte dello studente

- Scheda 'Facciamo il punto'

- Il contratto didattico

- Questionario prima/dopo

- Questionario sull'atteggiamento nei confronti delle difficoltà

FACCIAMO IL PUNTO

1. Come ti sembra di aver fatto?

☐ non lo so ☐ molto male ☐ male ☐ così e così ☐ abbastanza bene ☐ bene

Su cosa basi questa valutazione?

2. Nella tabella che segue i numeri della prima colonna indicano il numero progressivo delle domande che erano nel compito. Per ogni domanda rifletti se secondo te l'hai risolta correttamente, oppure pensi di aver fatto errori, oppure sapevi come farlo ma non sei riuscito a completarlo, oppure non hai proprio risposto, e metti quindi una crocetta nella colonna corrispondente.

Inoltre nell'ultima colonna scrivi, per ogni domanda cui non hai risposto o in cui pensi di aver fatto errori, quali sono le tue difficoltà o dubbi.

	L'ho risolto per intero correttamente	Penso di aver fatto degli errori	Sapevo come farlo ma l'ho risolto solo in parte	Non ho risposto	Le mie difficoltà e dubbi riguardano:
1					
2					
3					
4					
...					

- Questa scheda è una traccia da adattare a diverse situazioni.
- Va proposta allo studente alla fine di un compito, di una verifica, di un questionario articolati in una serie di domande.
- Nella prima colonna è riportato il numero progressivo della domanda, e per ognuna si chiede allo studente di valutare i propri processi risolutivi.

Viene restituita alla riconsegna del compito. L'attività si può completare chiedendo:

3. A questo punto dovresti essere in grado di valutare quali sono le tue (eventuali) carenze.

Scrivile qui di seguito:

- _____
- _____
- _____

IL PROCESSO DI ATTRIBUZIONE DELLE CAUSE DI FALLIMENTO



L'allievo deve credere nella necessità di un cambiamento.

L'allievo deve credere nella possibilità di un cambiamento.

L'allievo deve investire le sue risorse in modo mirato e continuo.

Attribuzioni di fallimento

Teoria delle attribuzioni causali (Weiner, 1973):

- locus: interno / esterno
- stabilità
- **controllabilità**

Ho fatto male il compito perché:

- Era difficile
- Il professore ci ha messo le uniche cose che non sapevo
- Non me l'hanno passato
- Non avevo studiato abbastanza
- Mi sentivo male
- Sono andato nel pallone

...

- Scheda 'Facciamo il punto'
- Il contratto didattico
- Questionario prima/dopo
- Questionario sull'atteggiamento nei confronti delle difficoltà

5. A cosa attribuisci le tue difficoltà in matematica?

	molto	poco	per niente
a) scarsa intelligenza	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) intelligenza di tipo diverso da quello necessario	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) scarso impegno	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) difficoltà della materia	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) sfortuna	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
f) eccessive richieste dell'insegnante	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
g) metodo di studio sbagliato	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
h) lacune di base	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
i) studio insufficiente	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
l) fattori emotivi	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
m) ALTRO (specificare):	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Cosa può fare l'insegnante:

- fissare obiettivi realistici per il recupero ed esplicitarli



L'allievo deve credere nella necessità di un cambiamento.

L'allievo deve credere nella possibilità di un cambiamento.

L'allievo deve investire le sue risorse in modo mirato e continuo.

- Scheda 'Facciamo il punto'
- Il contratto didattico
- Questionario prima/dopo
- Questionario sull'atteggiamento nei confronti delle difficoltà

Il 'contratto didattico'

[PROGETTO START, 1994]

- È un 'contratto' fra il singolo docente e il singolo allievo...
- ...in cui ognuno dei due si impegna a mettere in atto certi comportamenti
- Ad ogni 'impegno' dell'allievo corrisponde un 'impegno' simmetrico da parte dell'insegnante

S

IL CONTRATTO DIDATTICO

D

Dal _____ al _____ farò tutti i compiti assegnati impegnandomi a mostrare tentativi di risoluzione anche se errati.

Dal _____ al _____ mi impegno a correggerti individualmente tutti gli esercizi/compiti assegnati.

Dal _____ al _____ al termine di ogni lezione consegnerò all'insegnante un foglio in cui descrivo sinteticamente cosa è stato fatto a lezione.

Dal _____ al _____ mi impegno a leggere le tue note sulla tua descrizione della lezione e a dedicare nella lezione successiva alcuni minuti per spiegarti quello che non hai capito.

Una settimana prima del prossimo compito in classe preparerò un compito sull'argomento indicato dall'insegnante, lo svolgerò e lo consegnerò all'insegnante.

Almeno una settimana prima del compito mi impegno a comunicarti quale sarà l'argomento del compito. Mi impegno a correggere il compito che tu hai preparato e svolto prima del compito in classe.

Dal _____ al _____ seguirò attentamente le interrogazioni dei compagni, segnando per iscritto le domande fatte. A casa risponderò per iscritto a n. _____ domande e le consegnerò all'insegnante la lezione successiva.

Mi impegno, quando ti interrogo, a farti almeno una delle domande su cui hai lavorato appuntandoti le interrogazioni dei compagni.

S

IL CONTRATTO DIDATTICO

Dal _____ al _____ farò tutti i compiti assegnati impegnandomi a mostrare tentativi di risoluzione anche se errati.

Dal _____ al _____ al termine di ogni lezione consegnerò all'insegnante un foglio in cui descrivo sinteticamente cosa è stato fatto a lezione.

Una settimana prima del prossimo compito in classe preparerò un compito sull'argomento indicato dall'insegnante, lo svolgerò e lo consegnerò all'insegnante.

Dal _____ al _____ seguirò attentamente le interrogazioni dei compagni, segnando per iscritto le domande fatte. A casa risponderò per iscritto a n. _____ domande e le consegnerò all'insegnante la lezione successiva.



S

IL CONTRATTO DIDATTICO

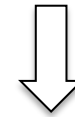
Dal _____ al _____ farò tutti i compiti assegnati impegnandomi a mostrare tentativi di risoluzione anche se errati.

Dal _____ al _____ al termine di ogni lezione consegnerò all'insegnante un foglio in cui descrivo sinteticamente cosa è stato fatto a lezione.

Una settimana prima del prossimo compito in classe preparerò un compito sull'argomento indicato dall'insegnante, lo svolgerò e lo consegnerò all'insegnante.

Dal _____ al _____ seguirò attentamente le interrogazioni dei compagni, segnando per iscritto le domande fatte. A casa risponderò per iscritto a n. _____ domande e le consegnerò all'insegnante la lezione successiva.

Questi comportamenti
producono dei risultati
visibili



- Danno il senso del lavoro fatto
- Diminuiscono la percezione di incontrollabilità
- Motivano a continuare sulla stessa strada
- Aiutano a dirigere l'impegno successivo

Cosa può fare l'insegnante:

- dare il senso del lavoro fatto

L'allievo deve credere nella necessità di un cambiamento.

L'allievo deve credere nella possibilità di un cambiamento.

L'allievo deve investire le sue risorse in modo mirato e continuo.



- Scheda 'Facciamo il punto'
- Il contratto didattico
- Questionario prima/dopo
- Questionario sull'atteggiamento nei confronti delle difficoltà

I QUESTIONARI PRIMA / DOPO

Una raccolta di domande riguardanti una specifica unità didattica.

Ogni foglio del questionario è diviso in due colonne:

- la prima colonna ospita le risposte degli studenti PRIMA che comincino a studiare l'argomento trattato, o prima dell'intervento di recupero
- la seconda colonna raccoglie le risposte (alle stesse domande) date DOPO aver studiato, o dopo l'intervento di recupero.

INSIEMI E LOGICA

Nome e cognome: _____

PRIMA di studiare	DOPO aver studiato
DATA: <u>19-9-96</u> ORE: <u>10:00</u>	DATA: <u>20/9/96</u> ORE: <u>16:00</u>
Pensi di essere preparato su questo argomento?	Pensi di essere preparato su questo argomento?
<input type="checkbox"/> sì <input checked="" type="checkbox"/> poco <input type="checkbox"/> per niente <input type="checkbox"/> non so	<input checked="" type="checkbox"/> sì <input type="checkbox"/> poco <input type="checkbox"/> per niente <input type="checkbox"/> non so
	Confronta questa risposta con quella che hai dato quando hai finito il questionario PRIMA.
	E' diversa? <u>Sì</u>

0. In questa unità utilizzeremo i seguenti simboli e/o vocaboli:

VOCABOLARIO									
insieme	appartenenza	sottinsieme	insieme vuoto	unione	intersezione				
differenza	prodotto cartesiano	per ogni	esiste	implica					
$\{1, 2, 3, 6, 9\}$	$x \in A$	$A \subset B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \times B$	$A \setminus B$	\emptyset	\forall	\exists \Rightarrow

Riporta nel riquadro qui sotto i simboli e i vocaboli che non conosci:

PRIMA	DOPO
$A \setminus B$ $A \times B$ prodotto cartesiano differenza	

La seconda riga è un **box che contiene i simboli e il vocabolario che verranno utilizzati nel Questionario.**

Ad esempio:

In questa Unità utilizzeremo i seguenti simboli e vocaboli:							
insieme	appartenenza	sottoinsieme	insieme vuoto	unione	intersezione		
	differenza	prodotto cartesiano	per ogni	esiste	implica		
$\{1,2,3,6,9\}$	$x \in A$	$A \subset B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \times B$	$A - B$	\emptyset
	\forall	\exists	\Rightarrow				

Le funzioni del box Vocabolario sono:

- Favorire nell'allievo la consapevolezza delle proprie conoscenze.
- Circoscrivere e limitare gli argomenti trattati:
 - forzando l'insegnante a esplicitare quello che l'allievo dovrà sapere
 - favorendo nell'allievo la percezione di controllabilità di quello che deve sapere e quindi favorendo la sua assunzione di responsabilità.

VOCABOLARIO

applicazione dominio codominio funzione reale di variabile reale
insieme di definizione grafico insieme immagine funzione iniettiva
composizione di funzioni funzione inversa funzione invertibile
funzione crescente $x \mapsto f(x)$ $f \circ g$ f^{-1}

VOCABOLARIO

Numeri naturali numeri interi numeri razionali numeri irrazionali
Numeri reali valore assoluto di un numero reale
N Z Q R $|x|$

La terza e la quarta riga:

RIPORTA NEL RIQUADRO QUI SOTTO I SIMBOLI E I VOCABOLI CHE NON CONOSCI	
PRIMA	DOPO
SCRIVI NEL RIQUADRO QUI SOTTO IL SIGNIFICATO DEI SIMBOLI E DEI VOCABOLI CHE CONOSCI	
PRIMA	DOPO

Le funzioni della terza e quarta riga sono:

- lasciare traccia di quello che lo studente non conosce (terza riga), che alla fine permetterà un confronto anche percettivo fra la colonna PRIMA e la colonna DOPO, favorendo la percezione dei progressi fatti;
- forzare lo studente a esplicitare le sue conoscenze, sia per valorizzare quello che sa, sia per dargli l'opportunità di controllare quanto è fondata la sua percezione di 'conoscere'.

LE DOMANDE

Dopo la quarta riga segue la parte centrale, con le **domande**.

La tipologia di domande dipende dal tipo di intervento di recupero (locale, sul metodo di studio, su lacune di base,...).

Caratteristiche delle domande:

- la domanda è la stessa per la colonna PRIMA e per quella DOPO
- è presente sempre l'opzione «non so»;
- Inoltre per ogni domanda si chiede:
 - di dichiarare il grado di certezza
 - di giustificare le risposte.

3. Considera i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{N} (\mathbb{N} è l'insieme dei numeri naturali, cioè interi positivi):

A: l'insieme dei numeri naturali minori di 8

B: l'insieme dei numeri dispari

Individua i seguenti insiemi:

PRIMA	DOPO
a] $A \cup B =$ <input type="checkbox"/> non so	a] $A \cup B =$ <input type="checkbox"/> non so
b] $A \cap B =$ <input type="checkbox"/> non so	b] $A \cap B =$ <input type="checkbox"/> non so
...	...
Sei sicuro delle risposte che hai dato? Se no, di quali risposte non sei sicuro? Perchè?	Sei sicuro delle risposte che hai dato? Se no, di quali risposte non sei sicuro? Perchè?

L'ultima riga:

PRIMA	DOPO
<p>Il questionario è finito.</p> <p>Sono le ore: _____</p> <p>Conta quante volte hai risposto "non so": ____</p> <p>Conta su quante singole domande hai risposto di "non essere sicuro": _____</p> <p>Adesso che hai finito, pensi di essere preparato su questo argomento?</p> <p><input type="checkbox"/> sì <input type="checkbox"/> poco <input type="checkbox"/> per niente <input type="checkbox"/> non so</p> <p>Confronta la risposta che hai dato ora con quella che hai dato all'inizio.</p> <p>È diversa?</p> <p>Se sì, come mai?</p> <p>In ogni caso, segna qui di seguito eventuali dubbi, incertezze, domande, che il questionario PRIMA ti ha provocato:</p>	<p>Il questionario è finito.</p> <p>Sono le ore: _____</p> <p>Conta quante volte hai risposto "non so": _____</p> <p>Conta su quante singole domande hai risposto di "non essere sicuro": _____</p> <p>Controlla per ogni domanda quante volte hai dato risposte diverse fra il questionario PRIMA e quello DOPO.</p> <p>Conta quante risposte diverse hai trovato: _____</p> <p>Ti sembra di aver migliorato la tua preparazione?</p> <p>Rispondi ancora: pensi di essere preparato su questo argomento?</p> <p><input type="checkbox"/> sì <input type="checkbox"/> poco <input type="checkbox"/> per niente <input type="checkbox"/> non so</p> <p>In ogni caso, segna ancora qui di seguito eventuali dubbi, incertezze, domande, che il questionario DOPO ti ha provocato:</p>

INSIEMI E LOGICA

Nome e cognome: _____

PRIMA di studiare	DOPO aver studiato
DATA: <u>19-9-96</u> ORE: <u>10:00</u>	DATA: <u>20/9/96</u> ORE: <u>16:00</u>
Pensi di essere preparato su questo argomento?	Pensi di essere preparato su questo argomento?
<input type="checkbox"/> sì <input checked="" type="checkbox"/> poco <input type="checkbox"/> per niente <input type="checkbox"/> non so	<input checked="" type="checkbox"/> sì <input type="checkbox"/> poco <input type="checkbox"/> per niente <input type="checkbox"/> non so
	Confronta questa risposta con quella che hai dato quando hai finito il questionario PRIMA.
	E' diversa? <u>Sì</u>

0. In questa unità utilizzeremo i seguenti simboli e/o vocaboli:

VOCABOLARIO											
insieme	appartenenza	sottinsieme	insieme vuoto	unione	intersezione						
differenza	prodotto cartesiano	per ogni	esiste	implica							
$\{1, 2, 3, 6, 9\}$	$x \in A$	$A \subset B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \times B$	$A \setminus B$	\emptyset	\forall	\exists	\Rightarrow	

Riporta nel riquadro qui sotto i simboli e i vocaboli che non conosci:

PRIMA	DOPO
$A \setminus B$ $A \times B$ prodotto cartesiano differenza	

INSIEMI E LOGICA

Nome e cognome: _____

PRIMA di studiare	DOPO aver studiato
DATA: <u>19-9-96</u> ORE: <u>10:00</u>	DATA: <u>20/9/96</u> ORE: <u>16:00</u>
Pensi di essere preparato su questo argomento?	Pensi di essere preparato su questo argomento?
<input type="checkbox"/> sì <input checked="" type="checkbox"/> poco <input type="checkbox"/> per niente <input type="checkbox"/> non so	<input checked="" type="checkbox"/> sì <input type="checkbox"/> poco <input type="checkbox"/> per niente <input type="checkbox"/> non so
	Confronta questa risposta con quella che hai dato quando hai finito il questionario PRIMA.
	E' diversa? <u>Sì</u>

0. In questa unità utilizzeremo i seguenti simboli e/o vocaboli:

VOCABOLARIO									
insieme	appartenenza	sottinsieme	insieme vuoto	unione	intersezione				
differenza	prodotto cartesiano	per ogni	esiste	implica					
$\{1, 2, 3, 6, 9\}$	$x \in A$	$A \subset B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \times B$	$A \setminus B$	\emptyset	\forall	\exists
								\Rightarrow	

Riporta nel riquadro qui sotto i simboli e i vocaboli che non conosci:

PRIMA	DOPO
$A \setminus B$ $A \times B$ prodotto cartesiano differenza	

1. Sono usati correttamente i simboli nelle seguenti espressioni? (le lettere maiuscole indicano insiemi, le minuscole elementi di tali insiemi)

PRIMA	DOPO
a) $A \in B$ si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>	a) $A \in B$ si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>
b) $a \subset B$ si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>	b) $a \subset B$ si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>
c) $A \cap B \cap C$ si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>	c) $A \cap B \cap C$ si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>
d) $\{a\} \cup B$ si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>	d) $\{a\} \cup B$ si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>
e) $a \cap B$ si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>	e) $a \cap B$ si <input type="checkbox"/> no <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>
Sei sicuro delle risposte che hai dato? Se no, di quali risposte non sei sicuro? Perché?	Sei sicuro delle risposte che hai dato? Se no, di quali risposte non sei sicuro? Perché?

2. E' vero o falso?

PRIMA	DOPO
a) $\{1,2,3,4\} = \{1,4,3,2\}$ vero <input type="checkbox"/> falso <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>	a) $\{1,2,3,4\} = \{1,4,3,2\}$ vero <input type="checkbox"/> falso <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>
b) $\{3,3,5,7\} = \{3,5,7\}$ vero <input type="checkbox"/> falso <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>	b) $\{3,3,5,7\} = \{3,5,7\}$ vero <input type="checkbox"/> falso <input type="checkbox"/> non so <input type="checkbox"/>

PRIMA	DOPO
Il questionario è finito.	Il questionario è finito.
Sono le ore: <u>21:55</u>	Sono le ore: <u>18:45</u>
Conta quante volte hai risposto "non so": <u>25</u>	Conta quante volte hai risposto "non so": <u>1</u>
Conta su quante singole domande hai risposto di "non essere sicuro": <u>2</u>	Conta su quante singole domande hai risposto di "non essere sicuro": <u>3</u>
Adesso che hai finito, pensi di essere preparato su questo argomento?	Controlla per ogni domanda quante volte hai dato risposte diverse fra il questionario PRIMA e quello DOPO.
<input type="checkbox"/> sì <input type="checkbox"/> poco <input checked="" type="checkbox"/> per niente <input type="checkbox"/> non so	Conta quante risposte diverse hai trovato: <u>2</u>
Confronta la risposta che hai dato ora con quella che hai dato all'inizio.	Ti sembra di aver migliorato la tua preparazione? <u>Sì</u>
E' diversa? <u>Sì</u>	Rispondi ancora: pensi di essere preparato su questo argomento?
Se sì, come mai? <u>PENSAVO DI RICORDARE MEGLIO L'ARGOMENTO</u>	<input checked="" type="checkbox"/> sì <input type="checkbox"/> poco <input type="checkbox"/> per niente <input type="checkbox"/> non so
In ogni caso, segna qui di seguito eventuali dubbi, incertezze, domande, che il questionario PRIMA ti ha provocato:	In ogni caso, segna ancora qui di seguito eventuali dubbi, incertezze, domande, che il questionario DOPO ti ha provocato:
<u>CHE COSA SONO I SIMBOLI:</u> <u>: , CA , xRy</u>	

Cosa può fare l'insegnante:

- in generale favorire il processo di *autovalutazione* da parte dello studente
- essere chiaro e trasparente nei criteri di valutazione utilizzati
- fissare obiettivi realistici per il recupero ed esplicitarli
- dare il senso del lavoro fatto

L'allievo deve credere nella necessità di un cambiamento.

L'allievo deve credere nella possibilità di un cambiamento.

L'allievo deve investire le sue risorse in modo mirato e continuo.