

*Scandiano, 8 maggio 2018*  
*Castelnovo ne' Monti, 9 maggio 2018*

# Errori e difficoltà in matematica

## Riflessioni e proposte didattiche

### PARTE 1

Rosetta Zan  
rosetta.zan@unipi.it

# La percezione degli insegnanti

- C'è una grossa frattura fra:
  - quello che insegniamo, o che siamo convinti di insegnare
  - quello che gli allievi effettivamente apprendono
- Addirittura alcune risposte degli allievi ci sembrano irrazionali, prive di senso

# Cosa faremo

1. Errori e comportamenti fallimentari: una galleria di esempi

Ovvero: *l'osservazione*

2. Cosa c'è dietro tali errori e comportamenti?

Ovvero: *l'interpretazione*

3. Che fare?

Ovvero: *l'intervento*

**1. UNA GALLERIA DI ESEMPI**  
**Ovvero: l'osservazione**

# ESEMPIO 1: Sottrazione in colonna

$\begin{array}{r} 278- \\ 135= \\ \hline 143 \end{array}$	$\begin{array}{r} 352- \\ 146= \\ \hline 214 \end{array}$	$\begin{array}{r} 406- \\ 219= \\ \hline 213 \end{array}$	$\begin{array}{r} 543- \\ 367= \\ \hline 224 \end{array}$	$\begin{array}{r} 510- \\ 238= \\ \hline 328 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1023- \\ 835 = \\ \hline 1812 \end{array}$
---	---	---	---	---	--

## Esempio 2: Il segno di uguale

**Problema: Quanti giorni di vacanza abbiamo avuto quest' estate?**

$$30-10 = 20+31 = 51+31 = 82+15 = 97$$

giugno

luglio

agosto

settembre

# Esempio 3: La gita

La gita (INVALSI, 2<sup>a</sup> primaria, 2012-2013)

Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita.

Restano due posti liberi.

Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino?

A: 19

B: 21

C: 23

36,2%

17,3%

# Esempio 4: Vicino a 100

INVALSI, 5<sup>a</sup> primaria, 2013

**D23. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 100?**

A  100,010

B.  100,001

C.  99,909

D.  99,990

→ 43,9%

→ 44,6%

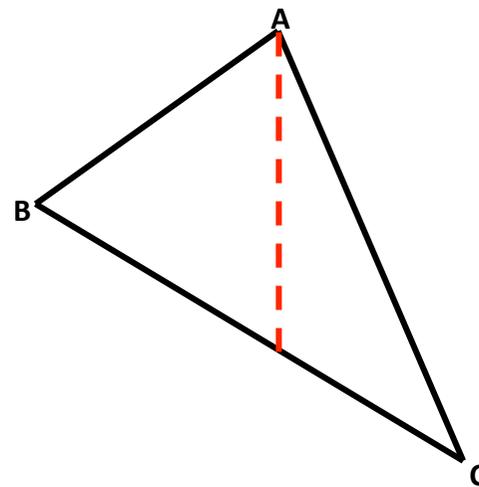
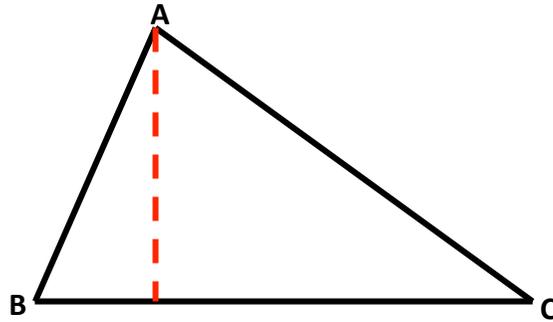
# Esempio 5 : L'età del capitano

## **L'età del capitano**

Su una nave ci sono 26 pecore e 10 capre;  
quanti anni ha il capitano?

$$26 + 10 = 36$$

# Esempio 6: Le altezze di un triangolo



## Esempio 7: Azzurra

Trovare il perimetro di un rettangolo che ha la base di 12 cm e l'altezza di 8 cm.

Azzurra:  $12 \times 8$

Ins.: 'Perché moltiplichi?'

Azzurra:

'Divido?'

## Esempio 8: Alessandro

Trovare l'area di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 126 cm, e l'altezza è  $\frac{3}{4}$  della base.



...e non conclude

## Esempio 9: Le parentesi

Marco deve moltiplicare  $x + 1$  per  $x + 2$ :

$$x + 1 \cdot (x + 2) =$$

$$= x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

# Esempio 10: Il vaso cinese

In una casa è stato rotto un vaso cinese. In quel momento si trovano in casa in 4 ragazzi: Angelo, Bruna, Chiara e Daniele. Al ritorno, la padrona di casa vuol sapere chi ha rotto il vaso e interroga i 4, uno alla volta. Ecco le dichiarazioni di ciascuno:

- Angelo: 'Non è stata Bruna'
- Bruna: 'E' stato un ragazzo'
- Chiara: 'Non è stato Daniele'
- Daniele: 'Non sono stato io'

*Sai scoprire chi è il colpevole? Attenzione, però: delle 4 testimonianze, 3 corrispondono alla verità mentre 1 è falsa.*

*Chi ha rotto il vaso cinese? Spiega come hai fatto a trovare la risposta.*

# Esempio 10: Il vaso cinese

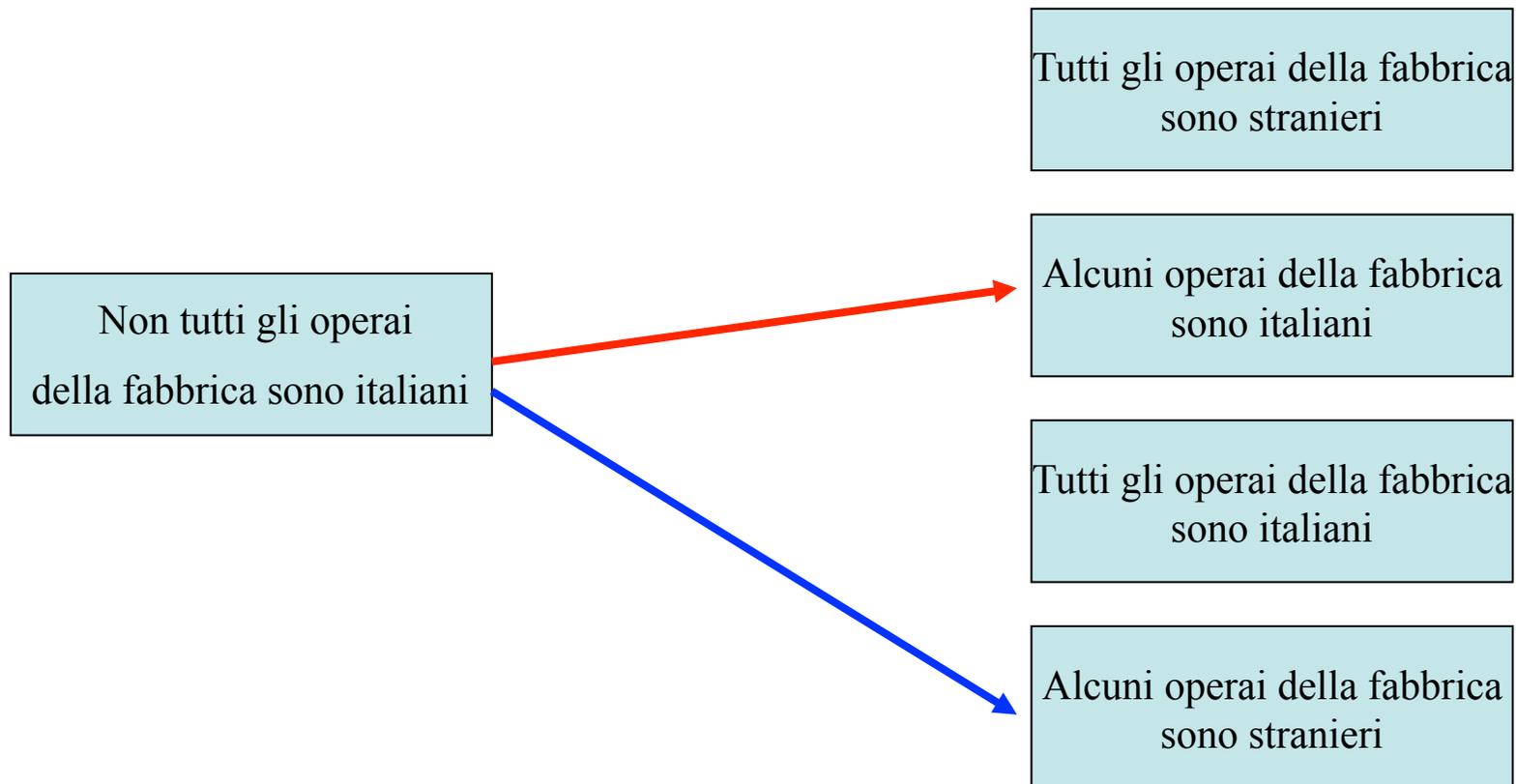
- ‘Angelo’: ‘non è discolpato da nessuno’
  - ‘Chiara’: ‘non è nominata da nessuno perché vogliono coprirla’
  - ‘Daniele’: ‘Si discolpa, quindi probabilmente è stato lui.’
- 
- Angelo: ‘Non è stata Bruna’
  - Bruna: ‘E’ stato un ragazzo’
  - Chiara: ‘Non è stato Daniele’
  - Daniele: ‘Non sono stato io’

*Sai scoprire chi è il colpevole? Attenzione, però: delle 4 testimonianze, 3 corrispondono alla verità mentre 1 è falsa.*

*Chi ha rotto il vaso cinese? Spiega come hai fatto a trovare la risposta.*

# Esempio 11: 'Non tutti'

*Collega con un tratto di penna la frase di sinistra con la frase o le frasi di destra che hanno significato equivalente:*



# Esempio 12: La somma di due numeri pari

Healy e Hoyles (2000)  
2549 studenti di 14-15 anni

Alice, Bruno, Carlotta, Davide, Elena, Francesco stanno cercando di dimostrare se il seguente enunciato è vero o falso: **Quando sommi due numeri pari, il risultato è sempre pari**

Fra le risposte scritte sopra scegli:

1. quella più vicina a **quello che tu faresti** per rispondere alla domanda: \_\_\_\_\_
2. quella a cui il **tuoinsegnante** darebbe il voto più alto: \_\_\_\_\_

Alice, Bruno, Carlotta, Davide, Elena, Francesco stanno cercando di dimostrare se il seguente enunciato è vero o falso: **Quando sommi due numeri pari, il risultato è sempre pari.**

**Risposta di Alice:**  
 a è un numero intero  
 b è un numero intero  
 2a e 2b sono due numeri pari  
 $2a + 2b = 2(a+b)$   
 Quindi Alice dice che è vero.

**Risposta di Bruno:**  
 $2+2=4$   
 $2+4=6$   
 $2+6=8$   
 $4+2=6$   
 $4+4=8$   
 $4+6=10$   
 Quindi Bruno dice che è vero.

**Risposta di Carlotta:**  
 I numeri pari sono numeri divisibili per 2. Quando sommi numeri che hanno un fattore comune, in questo caso 2, il risultato avrà ancora tale fattore in comune. Quindi Carlotta dice che è vero.

**Risposta di Davide:**  
 I numeri pari finiscono per 0, 2, 4, 6, o 8. Quando sommi due di questi numeri, il risultato finirà ancora per 0, 2, 4, 6 o 8. Quindi Davide dice che è vero.

**Risposta di Elena:**  
 Sia  $x =$  un numero intero  
 $y =$  un numero intero  
 $x+y=z$   
 $z-x=y$   
 $z-y=x$   
 $z+z-(x+y)=x+y=2z$   
 Quindi Elena dice che è vero.

**Risposta di Francesco:**

●●●●● + ●●●●●  
 ●●●●● + ●●●●●  
 =  
 ●●●●●●●●●●  
 ●●●●●●●●●●

Quindi Francesco dice che è vero.

EMPIRICO

NARRATIVO

VISUALE

ALGEBRICO

1- Fra le risposte scritte sopra, scegli quella più vicina a quello che tu faresti per rispondere alla domanda: \_\_\_\_\_  
 2- Fra le risposte scritte sopra, scegli quella a cui il tuo insegnante darebbe il voto più alto: \_\_\_\_\_

Fra le risposte scritte sopra scegli:

1. quella più vicina a **quello che tu faresti** per rispondere alla domanda: \_\_\_\_

2. **quella a cui il tuo insegnante darebbe il voto più alto:** \_\_\_\_

Davide (narrativo)	29%	7%
Bruno (empirico)	24%	3%
Carlotta (narrativo)	17%	17%
Francesco (visuale)	16%	9%
<b>Alice (algebrico)</b>	12%	22%
<b>Elena (algebrico)</b>	2%	<b>42%</b>

**Risposta di Elena:**

Sia  $x =$  un numero intero

$y =$  un numero intero

$$x + y = z$$

$$z - x = y$$

$$z - y = x$$

$$z + z - (x + y) = x + y = 2z$$

Quindi Elena dice che è vero.

Fra le risposte scritte sopra scegli:

1. quella più vicina a **quello che tu faresti** per rispondere alla domanda: \_\_\_\_

2. quella a cui il tuo insegnante darebbe il voto più alto: \_\_\_\_

Davide (narrativo)	29%	7%
Bruno (empirico)	24%	3%
Carlotta (narrativo)	17%	17%
Francesco (visuale)	16%	9%
<b>Alice (algebrico)</b>	12%	22%
<b>Elena (algebrico)</b>	2%	<b>42%</b>

**Risposta di Elena:**

Sia  $x =$  un numero intero

$y =$  un numero intero

$$x + y = z$$

$$z - x = y$$

$$z - y = x$$

$$z + z - (x + y) = x + y = 2z$$

Quindi Elena dice che è vero.

Esempio 1:  
Sottrazione

Esempio 2:  
Il segno =

Esempio 3:  
La gita

Esempio 4:  
Vicino a 100

Esempio 12:  
La somma di pari

**OSSERVAZIONE:**  
Una galleria di  
comportamenti

Esempio 5:  
L'età del capitano

Esempio 11:  
'Non tutti'

Esempio 6:  
Le altezze

Esempio 10:  
Vaso cinese

Esempio 9:  
Le parentesi

Esempio 8:  
Alessandro

Esempio 7:  
Azzurra

## 2. L'interpretazione

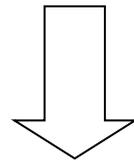
Ovvero: perché?

# **l'interpretazione**

~~giusta / sbagliata~~

è un' ipotesi di lavoro

funziona / non funziona



**è essenziale per dirigere  
l'azione didattica**

# INTERPRETAZIONE

## L' apprendimento come attività costruttiva

- Misconcetti e modelli primitivi
- Linguaggio matematico e linguaggio quotidiano
- Razionalità matematica e altre forme di razionalità
- Convinzioni e atteggiamenti

# INTERPRETAZIONE



**L' apprendimento come attività costruttiva**

➔ **visione ‘tradizionale’ :**

il *contenitore vuoto* da riempire...

➔ **l’ apprendimento come *attività costruttiva***

...la conoscenza è in gran parte *costruita* dal discente

■ l’individuo è soggetto attivo che interpreta l’esperienza

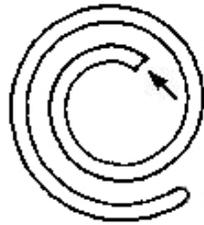
■ costruisce *convinzioni*

mondo degli oggetti fisici

mondo degli organismi viventi

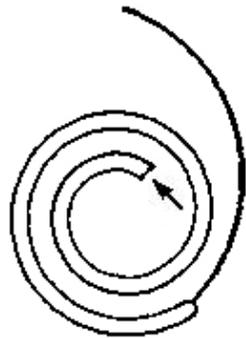
mondo degli esseri umani

↘ teorie



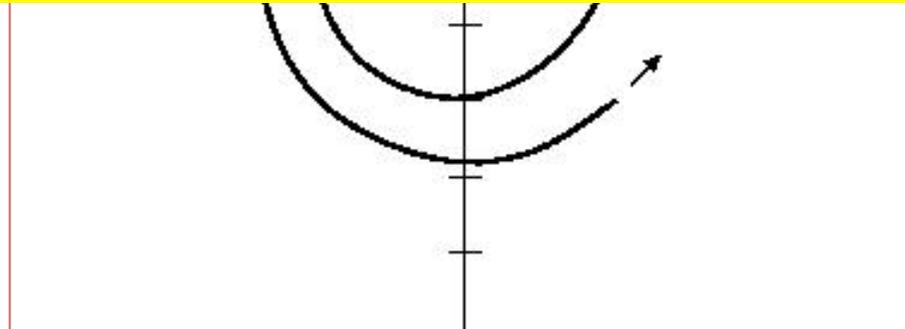
Prevedere il moto della pallina all'uscita del tubo

Anche studenti di fisica rispondono così:



*Problema:* La figura mostra un tubo metallico curvo visto dall'alto. Una sfera metallica è inserita alla fine del tubo indicato dalla freccia ed è spinta dall'altra parte del tubo ad alta velocità. Il punto in cui fuoriesce la sfera ha coordinate (2,-2) (la misura è in metri). La sfera esce nella direzione del vettore  $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$  con una velocità iniziale di 500 m/sec. Dare le coordinate della sfera un secondo dopo l'uscita dal tubo.

## IL RUOLO DEL CONTESTO

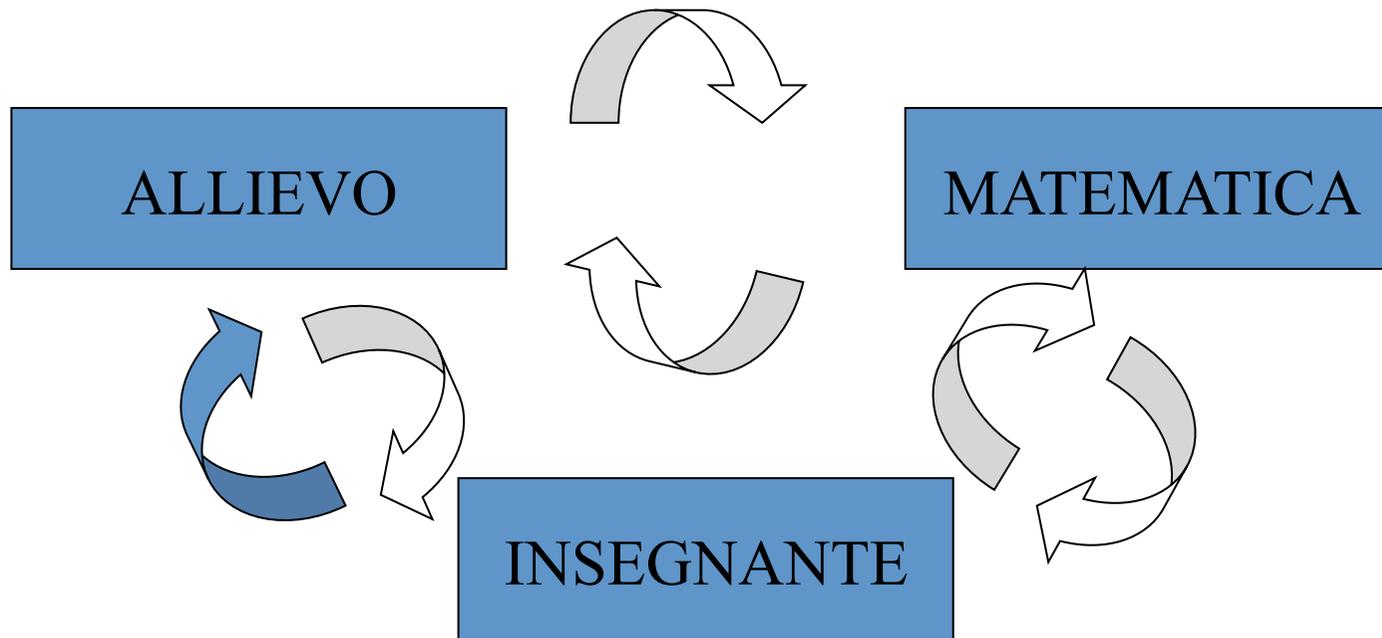


# INTERPRETAZIONE

**L' apprendimento come attività costruttiva**

- Misconcetti e modelli primitivi

## In contesto scolastico



L' allievo:

- interpreta i messaggi dell' insegnante alla luce delle proprie conoscenze, convinzioni, esperienze...



interpretazione 'distorta'

**MISCONCETTI**

# L' allievo interpreta...**procedure**

Errori sistematici.

Molti allievi sbagliano...

...non perché applicano in modo scorretto procedure corrette

Ma perché applicano (in modo corretto) procedure scorrette

## ESEMPIO 1

$\begin{array}{r} 278- \\ 135= \\ \hline 143 \end{array}$	$\begin{array}{r} 352- \\ 146= \\ \hline 214 \end{array}$	$\begin{array}{r} 406- \\ 219= \\ \hline 213 \end{array}$	$\begin{array}{r} 543- \\ 367= \\ \hline 224 \end{array}$	$\begin{array}{r} 510- \\ 238= \\ \hline 328 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1023- \\ 835= \\ \hline 1812 \end{array}$
---	---	---	---	---	---

L' allievo interpreta... termini / simboli

- spigolo – rombo - altezza...
- ipotesi / tesi
- le parentesi
- segno di uguale
- ...

## Esempio 2: Il segno di uguale

**Problema: Quanti giorni di vacanza abbiamo avuto quest' estate?**

$$30-10 = 20+31 = 51+31 = 82+15 = 97$$

giugno

luglio

agosto

settembre

**"Secondo te questo calcolo fatto da due bambini di terza è giusto?"**

# Una discussione in classe

## **CHE COSA SIGNIFICA IL SEGNO "=" IN MATEMATICA?**

- INS: Cosa vuol dire "essere uguale a" , quel segno lì in matematica che significa?
- ILA: Vuol dire che viene il risultato.

- LUI: Tu per fare l'uguale devi fare prima l'operazione e poi devi fare l'uguale, così ti viene fuori il risultato.
- GIO: Uguale significa avere un risultato in un'operazione, in una moltiplicazione e così
- INS: E se io scrivo  $8=8$  va bene?
- GIO: No, devi anche metterci +0 perché se no non si capisce...

...devi metterci anche qualcosa.

# Alice

Alice, prima liceo classico:

$$x^2 = 3x - 2$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

# Alice

“Non sarò certo io a contestare una regola che tutti accettano!

Mi adeguo senz'altro.

Ma nessuno mi potrà mai convincere che se aggiungo la stessa quantità ai due membri di un'equazione, *non cambia niente!*”

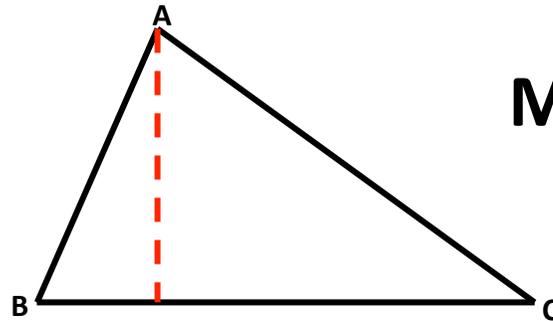
## Esempio 9: Le parentesi

Marco deve moltiplicare  $x + 1$  per  $x + 2$ :

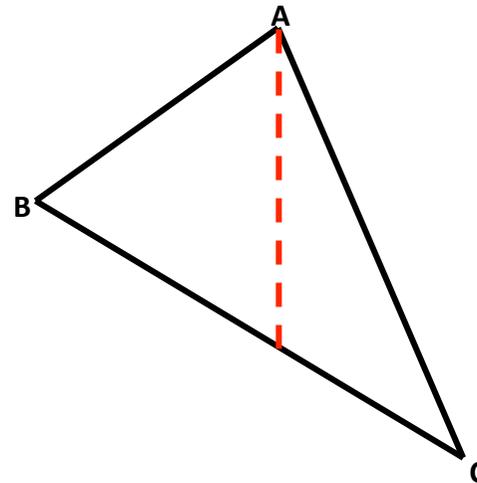
$$x + 1 \cdot (x + 2) =$$

$$= x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$$

# Esempio 6: Le altezze di un triangolo



**MODELLO PRIMITIVO**



## **INFLUENZA DEL LINGUAGGIO**

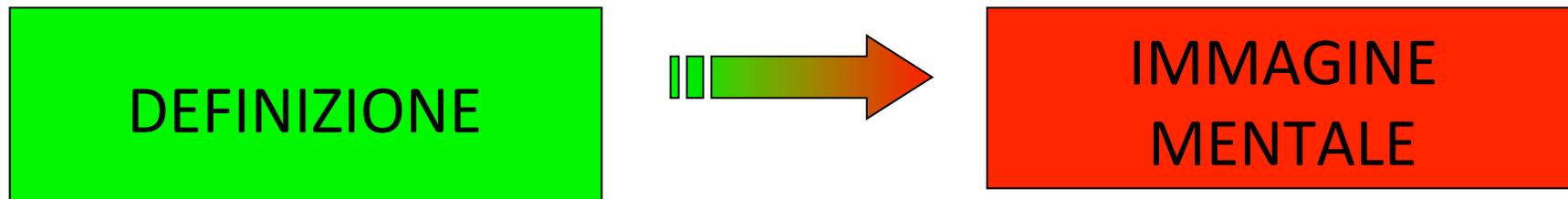
- l' altezza di una persona
- ...di una casa
- ...di un ponte

Ostacoli legati alle *definizioni*

Dopo aver visto la definizione e gli esempi fatti dall'insegnante, l'allievo si costruisce una

# immagine mentale

di tale definizione...



# DEFINIZIONE

Altezza: E' il segmento che esce da un vertice ed è perpendicolare al lato opposto

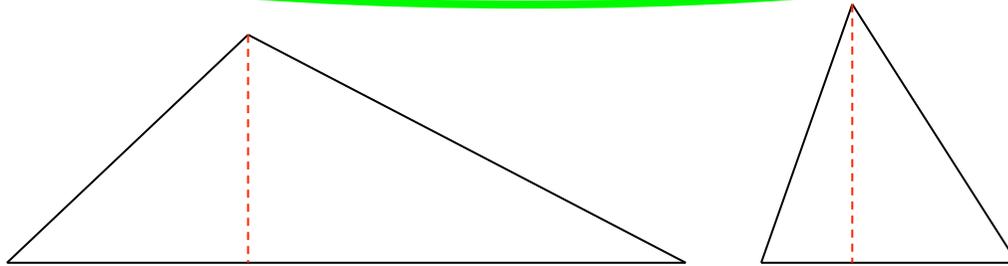
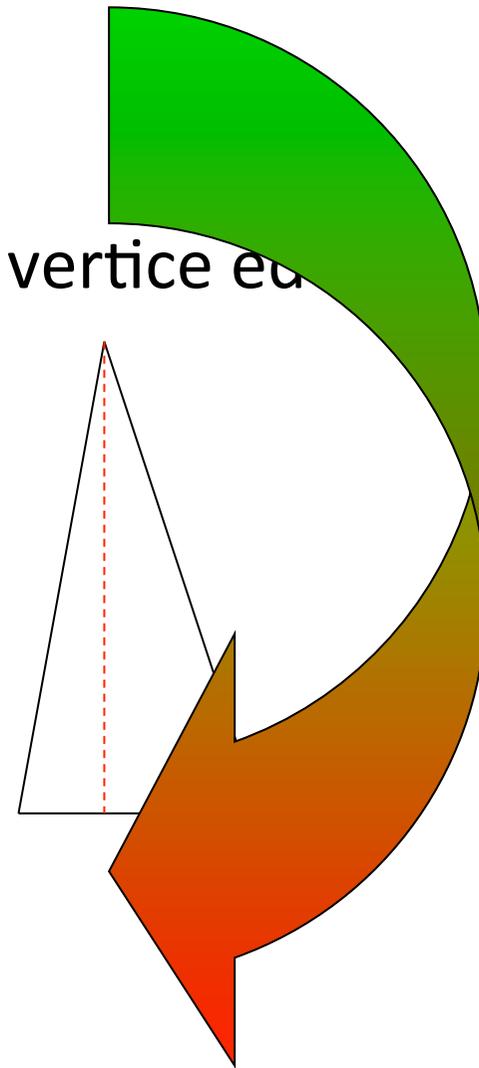


IMMAGINE  
MENTALE

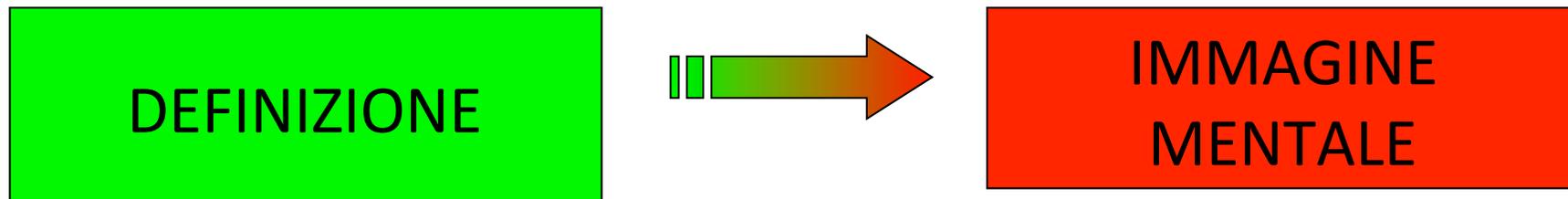
...è verticale



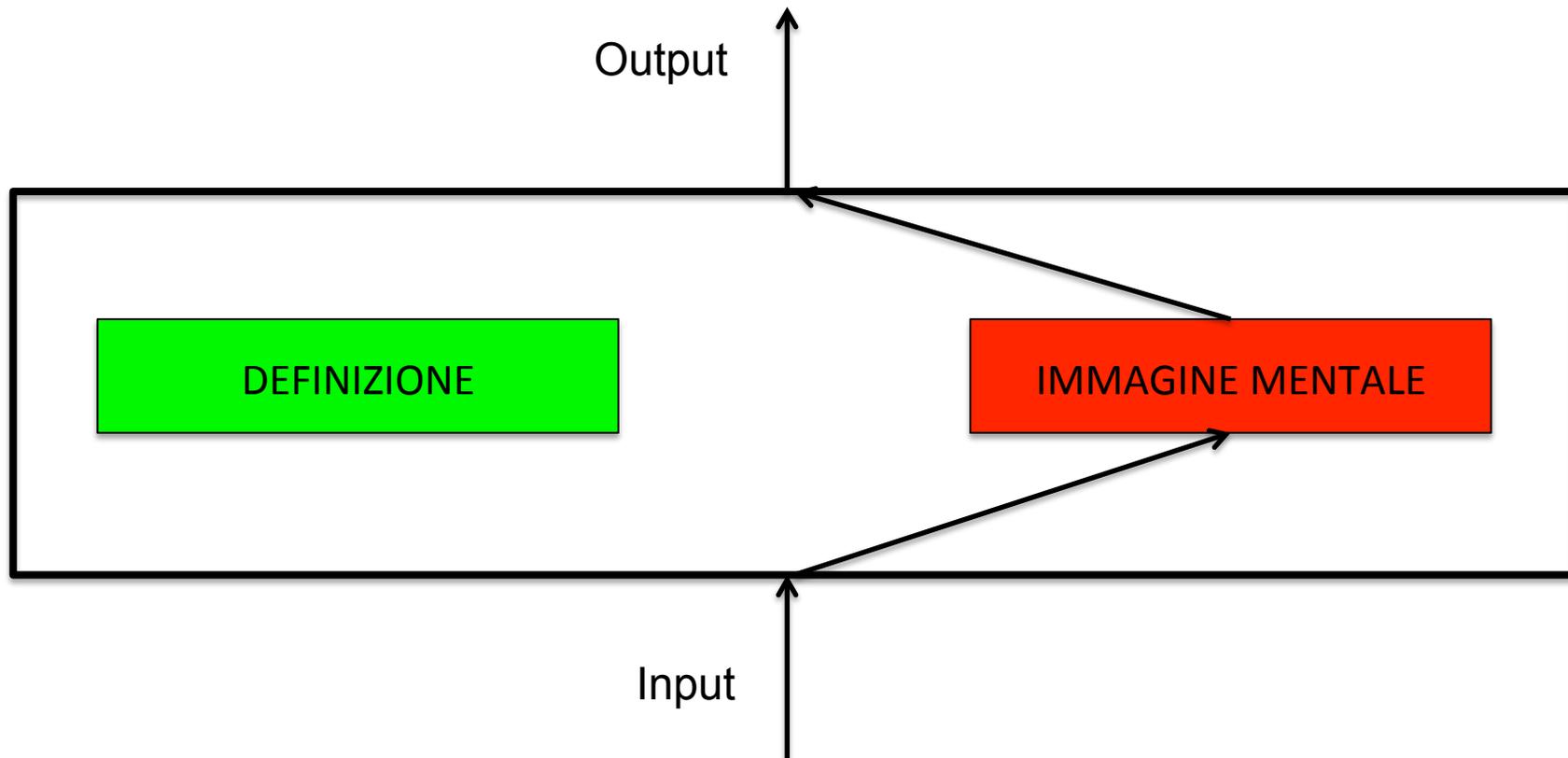
Dopo aver visto la definizione e gli esempi fatti dall'insegnante, l'allievo si costruisce una

## **immagine mentale**

di tale definizione...

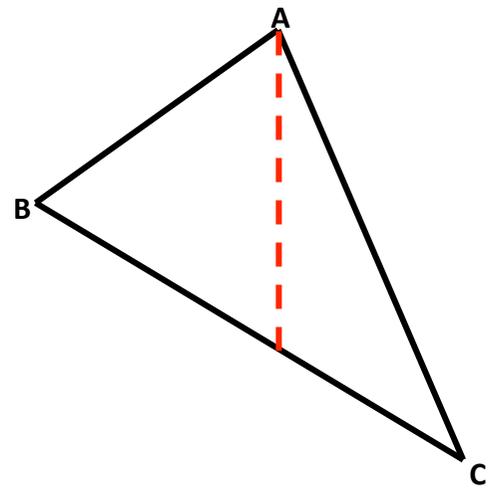
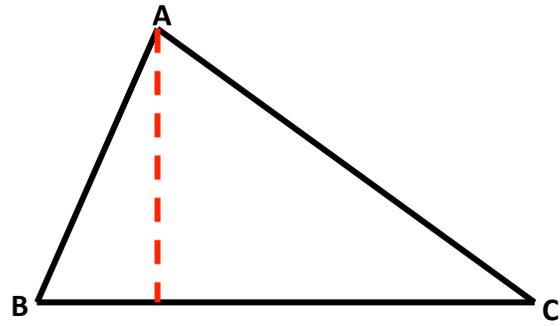


...ed è a tale immagine mentale che ricorre quando deve risolvere problemi ecc.



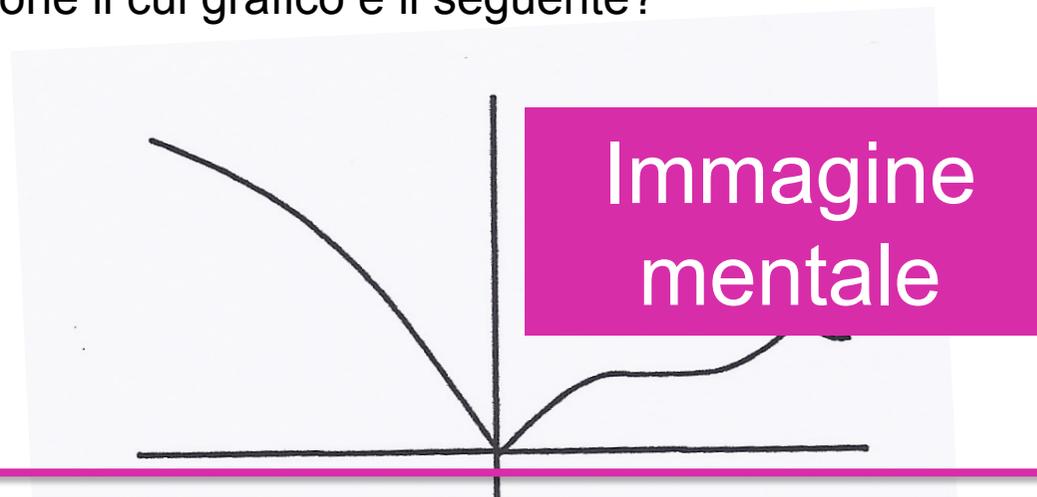
## *Risposta intuitiva*

...emerge soprattutto in situazioni non standard, un po' diverse dall'usuale



# 1. Funzione

1. Esiste una funzione in cui ogni numero diverso da 0 è associato al suo quadrato, e allo 0 è associato 1?
2. Esiste una funzione in cui ogni numero positivo è associato a 1, ogni numero negativo è associato a -1, e 0 è associato a 0?
3. Esiste una funzione il cui grafico è il seguente?



4. Secondo te cos'è una funzione?

## Definizione

Molti studenti che alla domanda 4 danno una definizione corretta di funzione non la utilizzano per rispondere alle domande 1-3.

# INTERPRETAZIONE

## **L' apprendimento come attività costruttiva**

- Misconcetti e modelli primitivi
- Linguaggio matematico e linguaggio quotidiano

LINGUAGGIO  
MATEMATICO

LINGUAGGIO  
QUOTIDIANO

A volte le difficoltà nascono da una sovrapposizione dei due linguaggi...

- ipotesi / tesi
- angolo, spigolo
- altezza
- ...

# Esempio 4: Vicino a 100

INVALSI, 5<sup>a</sup> primaria, 2013

**D23. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 100?**

A  100,010

B.  100,001

C.  99,909

D.  99,990

→ 43,9%

→ 44,6%

“Allievi che non padroneggiano la scrittura decimale dei numeri.”

# Esempio 4: Vicino a 100

INVALSI, 5<sup>a</sup> primaria, 2013

**D23. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 100?**

A  100,010

B.  100,001

→ 43,9%

C.  99,909

D.  99,990

→ 44,6%

Nelle nostre sperimentazioni abbiamo chiesto:

*Spiega come hai ragionato.*

“Non abbiamo considerato i numeri successivi a cento perché il numero più vicino a cento vuol dire che non c’è ancora arrivato.”

La riformulazione proposta dai bambini è:

“Quale di questi numeri, *andando avanti e indietro sulla retta dei numeri*, si avvicina di più a 100?”

LINGUAGGIOMA  
TEMATICO

LINGUAGGIOQU  
OTIDIANO

A volte le difficoltà nascono da una sovrapposizione dei due linguaggi...

- ipotesi / tesi
- angolo, spigolo
- altezza
- ...

O dall' uso diverso dei connettivi e dell' implicazione

# Connettivi

- 6 è un numero pari **e** divisibile per 3
- 6 è un numero divisibile per 3 **e** pari

...commutativo

- L' ho visto **e** ho cambiato strada.
- Ho cambiato strada **e** l' ho visto.

...non commutativo

# Implicazione

- Se un numero è divisibile per 4 allora è divisibile per 2

- ~~• Se un numero non è divisibile per 4 allora non è divisibile per 2~~

- Se passi ti compro il motorino.

- Se non passi non ti compro il motorino.

# Ma ci sono differenze più globali

Il ruolo del contesto:

- Altri linguaggi di accompagnamento del messaggio: il tono della voce, l'espressione del viso, la postura,
  - Le regole di comunicazione (la pragmatica)
- Il principio di cooperazione di Grice

# Principio di cooperazione

Esempio:

A: Dov' è Carlo?

B: C' è una Volkswagen gialla davanti a casa di Anna.

In casi come questi l' ascoltatore per mantenere l' assunto di cooperazione fa delle inferenze:

*implicature conversazionali*

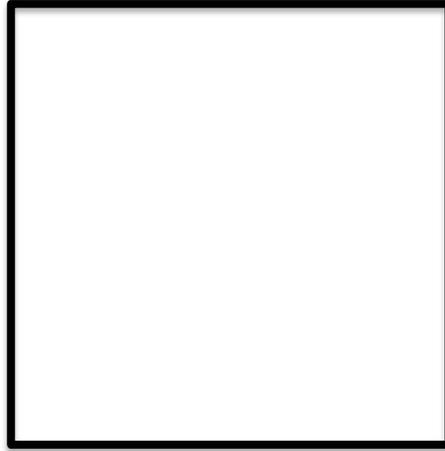
Ho buttato un uovo contro il muro e non si è rotto.

*...cosa non si è rotto?*

Ho buttato un sasso contro il vetro e non si è rotto.

*...cosa non si è rotto?*





Questa figura è un rettangolo?

In matematica:

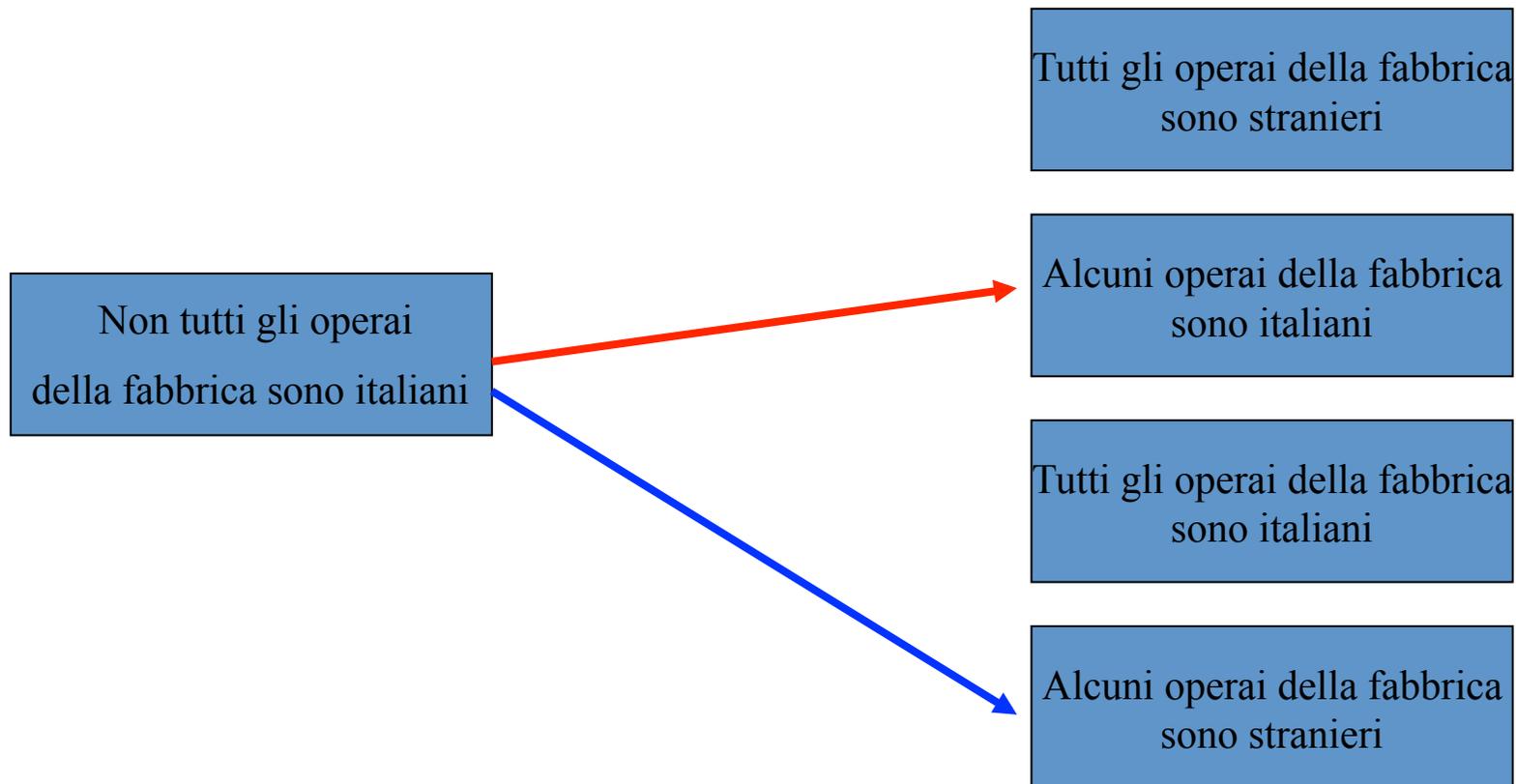
Sì, perché il quadrato ha anche le proprietà del rettangolo, e quindi è un particolare rettangolo.

Nel linguaggio quotidiano non lo diremmo mai, perché tendiamo a dare più informazioni possibile.

Perché 'tacere' che è un quadrato, cioè qualcosa di più di un rettangolo?

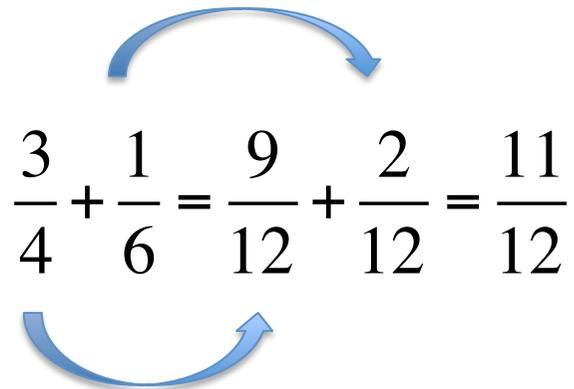
# Esempio 11: 'Non tutti'

*Collega con un tratto di penna la frase di sinistra con la frase o le frasi di destra che hanno significato equivalente:*



- In generale il linguaggio matematico dovrebbe essere percepito come un linguaggio utile e potente per affrontare / risolvere problemi
- Rispetto al linguaggio quotidiano infatti:
  - è più conciso
  - è meno ambiguo,
  - ma soprattutto sul linguaggio matematico, a differenza di quello che accade col linguaggio quotidiano, si possono fare trasformazioni (cioè operazioni di **trattamento**) utili per la risoluzione di un problema.

# Il *trattamento*


$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$$

La trasformazione di:

$$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{9}{12}$$

$$\frac{1}{6} \rightarrow \frac{2}{12}$$

non corrisponde a esigenze comunicative:

ha invece la funzione di rendere chiaramente applicabile un algoritmo noto.

# La somma di due numeri pari

- Dimostrare che la somma di due numeri pari è pari

$a$  e  $b$  sono numeri pari, cioè si possono scrivere come prodotto di 2 per un numero naturale

$$a=2h$$

$$b=2k$$

$$a + b = 2h + 2k = 2(h+k) \rightarrow \text{è pari}$$

# Esempio 12: La somma di due numeri pari 1.

È la risposta scritta come segue:

Il linguaggio matematico:

- non è percepito come uno strumento potente per affrontare / risolvere problemi
- ma come una forma imposta dall'insegnante in cui presentare le soluzioni dei problemi

Davide (narrativo)	29%	7%
Bruno (empirico)	24%	3%
Carlotta (narrativo)	17%	17%
Francesco (visuale)	16%	9%
<b>Alice (algebrico)</b>	12%	22%
<b>Elena (algebrico)</b>	2%	<b>42%</b>

**Risposta di Elena:**

Sia  $x =$  un numero intero

$y =$  un numero intero

$$x + y = z$$

$$z - x = y$$

$$z - y = x$$

$$z + z - (x + y) = x + y = 2z$$

Quindi Elena dice che è vero.

# INTERPRETAZIONE

## L' apprendimento come attività costruttiva

- Misconcetti e modelli primitivi
- Linguaggio matematico e linguaggio quotidiano
- Razionalità matematica e altre forme di razionalità

RAZIONALITÀ  
MATEMATICA

RAZIONALITÀ  
QUOTIDIANA

E' vero che se si moltiplica un numero divisibile per 3 per uno pari il risultato è sempre un numero divisibile per 6?

Devo DIMOSTRARE:

$n$  divisibile per 3:  $n=3k$

$m$  divisibile per 2:  $m=2h$

$nm=3k \cdot 2h=6kh$

→ è divisibile per 6

Provo con degli esempi:

$3, 2 \rightarrow 6$

$6, 4 \rightarrow 24$

$15, 4 \rightarrow 60$

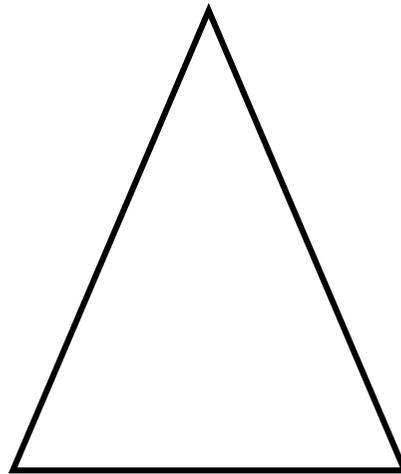
Sì, è vero!

RAZIONALITÀ  
MATEMATICA

RAZIONALITÀ  
QUOTIDIANA

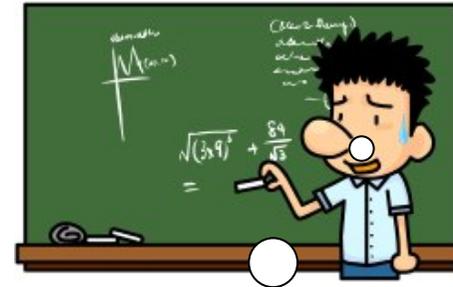
Un triangolo che ha due lati uguali ha anche due angoli uguali.

E' un teorema: va dimostrato a partire dagli assiomi e da altri teoremi



Si vede dal disegno!

La matematica serve  
per RAGIONARE!



!!!??????

Ci sono dei concetti che mi rimangono astratti, che non riesco a capire.

Ci sono professori ai quali ho chiesto: a cosa serve la matematica? Loro mi hanno risposto, è una materia che fa ragionare, ma secondo me è una materia che fa andare fuori di testa tanta gente.

(1<sup>a</sup> secondaria di 2<sup>o</sup> grado)

# Esempio 12: La somma di due numeri pari 2.

Fra le risposte scritte sopra scegli:

Anche la razionalità matematica:

- non è percepita come uno strumento potente per affrontare / risolvere problemi
- ma come una forma imposta dall'insegnante in cui presentare le soluzioni dei problemi

Davide (narrativo)	29%	7%
<b>Bruno (empirico)</b>	<b>24%</b>	3%
Carlotta (narrativo)	17%	17%
Francesco (visuale)	16%	9%
Alice (algebrico)	12%	22%
Elena (algebrico)	2%	<b>42%</b>

**Risposta di Bruno:**

$$2+2=4$$

$$2+4=6$$

$$2+6=8$$

$$4+2=6$$

$$4+4=8$$

$$4+6=10$$

Quindi Bruno dice che è vero.

PENSIERO  
LOGICO - SCIENTIFICO

PENSIERO  
NARRATIVO

affinità e differenze fra:

RAZIONALITÀ  
MATEMATICA

RAZIONALITÀ  
QUOTIDIANA

**...differenti razionalità**

(Jerome Bruner)

PENSIERO  
LOGICO - SCIENTIFICO

PENSIERO  
NARRATIVO

*si occupa di categorizzare la realtà, di ricercare cause di ordine generale, applicando argomentazioni dimostrative...*

*...ma appare inadeguato a interpretare fatti umani, cioè a mettere in relazione azioni e intenzioni, desideri, convinzioni e sentimenti, a coglierne il significato*

*L'interpretazione dei fatti umani è invece resa praticabile da un tipo differente di pensiero, che caratterizza una differente modalità di approccio al mondo*

L'idea di *causalità* è centrale in entrambi i tipi di pensiero

...ma nei due casi si tratta di tipi diversi di causalità

‘Il termine «allora» riveste funzioni molto diverse nell’ enunciato logico “se X, allora Y” e nel testo narrativo “il re morì e allora morì anche la regina”.

Nel primo caso esso allude a una ricerca delle condizioni universali di verità, nel secondo a probabili rapporti particolari fra due eventi: un dolore mortale, il suicidio o un delitto.’

...ma nei due casi si tratta di tipi diversi di  
causalità

(Bruner, 1986)

# INVALSI, 2<sup>a</sup> primaria, 2012-2013

## La gita

Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita.

Restano due posti liberi.

Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino?

A: 19

B: 21

C: 23

36,2%

17,3%

Allievi che non sanno riconoscere la parola “due” come dato numerico, oppure...

...che non sanno riconoscere come informazione rilevante

l'espressione “accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa”

# INVALSI, 2<sup>a</sup> primaria, 2012-2013

## La gita

Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita.

Restano due posti liberi.

Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino?

A: 19

B: 21

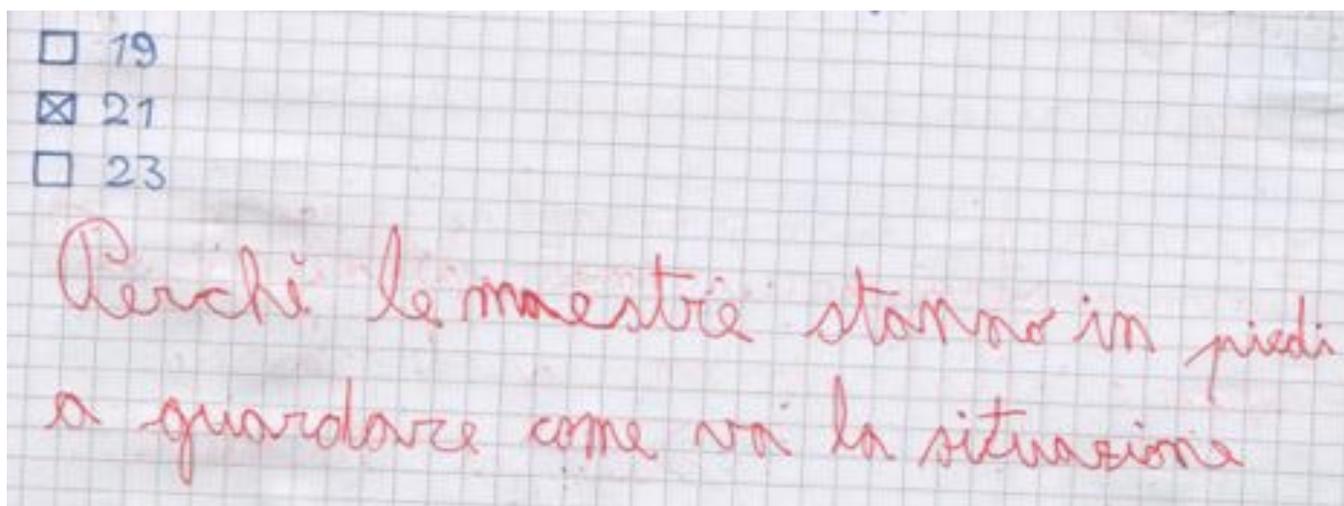
C: 23



36,2%



17,3%



# Esempio 10: Il vaso cinese

In una casa è stato rotto un vaso cinese. In quel momento si trovano in casa in 4 ragazzi: Angelo, Bruna, Chiara e Daniele. Al ritorno, la padrona di casa vuol sapere chi ha rotto il vaso e interroga i 4, uno alla volta. Ecco le dichiarazioni di ciascuno:

- Angelo: 'Non è stata Bruna'
- Bruna: 'E' stato un ragazzo'
- Chiara: 'Non è stato Daniele'
- Daniele: 'Non sono stato io'

*Sai scoprire chi è il colpevole? Attenzione, però: delle 4 testimonianze, 3 corrispondono alla verità mentre 1 è falsa.*

*Chi ha rotto il vaso cinese? Spiega come hai fatto a trovare la risposta.*

# Esempio 10: Il vaso cinese

- ‘Angelo’: ‘non è discolpato da nessuno’
  - ‘Chiara’: ‘non è nominata da nessuno perché vogliono coprirla’
  - ‘Daniele’: ‘Si discolpa, quindi probabilmente è stato lui.’
- 
- Angelo: ‘Non è stata Bruna’
  - Bruna: ‘E’ stato un ragazzo’
  - Chiara: ‘Non è stato Daniele’
  - Daniele: ‘Non sono stato io’

*Sai scoprire chi è il colpevole? Attenzione, però: delle 4 testimonianze, 3 corrispondono alla verità mentre 1 è falsa.*

*Chi ha rotto il vaso cinese? Spiega come hai fatto a trovare la risposta.*

# Esempio 5 : L'età del capitano

## L'età del capitano

Su una nave ci sono 26 pecore e 10 capre;  
quanti anni ha il capitano?”

$26 + 10 = 36$       *Perché hai risposto così?*

‘Ho sbagliato perché ho guardato i numeri perché di solito devo fare delle operazioni, e non ho letto attentamente.’

## Esempio 5: L'età del capitano 2.

*Problema:* Su una nave ci sono 36 pecore, durante la traversata 10 muoiono affogate. Quanti anni ha il capitano?

**Risposta:**

*Ho risposto "è morto" perché dal peso delle pecore la barca si ribalta e il capitano affoga.*

# Esempio 5: L'età del pastore 1.

*Problema:* In un prato ci sono 20 pecore, 7 capre, e 2 cani. Quanti anni ha il pastore?

**Risposta:**

$$20+7+2=29$$

Il pastore ha 29 anni.

## Esempio 5: L'età del pastore 2.

*Problema:* In un prato ci sono 20 pecore, 7 capre, e 2 cani. Quanti anni ha il pastore?

*'Ho fatto un ragionamento particolare: il pastore se ha due cani per così poche bestie uno dei due cani forse gli serve perché è non vedente. Quindi deduco che abbia sui 70-76 anni.'*

# INTERPRETAZIONE

## L' apprendimento come attività costruttiva

- Misconcetti e modelli primitivi
- Linguaggio matematico e linguaggio quotidiano
- Razionalità matematica e altre forme di razionalità
- Convinzioni e atteggiamenti

# Le convinzioni

➔ visione 'tradizionale' :

il *contenitore vuoto* da riempire...

➔ l' apprendimento come *attività costruttiva*

...la conoscenza è in gran parte *costruita* dal discente

■ l' individuo è soggetto attivo che interpreta l' esperienza

■ costruisce *convinzioni*

mondo degli oggetti fisici

mondo degli organismi viventi

mondo degli esseri umani

↘ teorie

SU DI SÈ

SULLA MATEMATICA

C  
O  
N  
V  
I  
N  
Z  
I  
O  
N  
I

SU DI SÈ

C  
O  
N  
V  
I  
N  
Z  
I  
O  
N  
I

## Esempio 7: Azzurra

Trovare il perimetro di un rettangolo che ha la base di 12 cm e l'altezza di 8 cm.

Azzurra:  $12 \times 8$

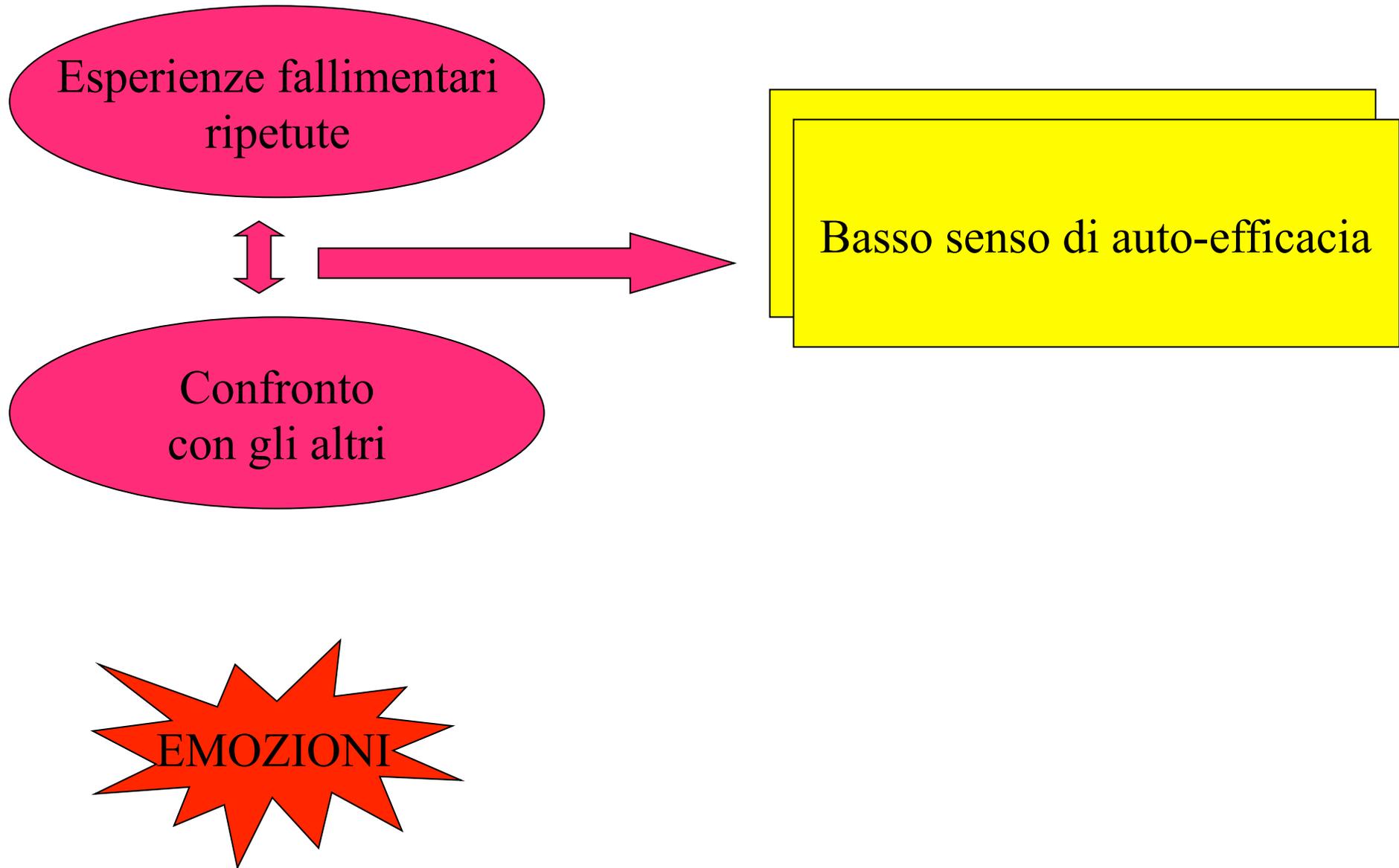
Ins.: 'Perché moltiplichi?'

Azzurra:

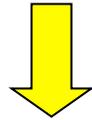
'Divido?'

Dal tema: *Io e la matematica*

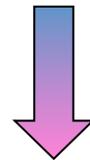
*“Alle elementari non ero una grossa cima in matematica, quindi in 3<sup>a</sup> elementare vidi che non ero brava e chiusi così la mia testa, dicendo che questa non faceva per me.”* Azzurra



Basso senso  
di auto efficacia



La matematica  
è incontrollabile



Rinuncia  
a pensare



NON  
RISPONDE



RISPONDE  
A CASO

## Esempio 5 : L'età del capitano 2.

*Problema:* Su una nave ci sono 36 pecore, durante la traversata 10 muoiono affogate. Quanti anni ha il capitano?

$36 - 10 = 26$       *Perché hai risposto così?*

'Ho sbagliato perché pensavo che il numero delle pecore (26) combaciasse con gli anni del capitano ma il problema è che non mi fido di me stessa e mi fido della maestra.'

# Attribuzioni di fallimento



Teoria delle attribuzioni causali (Weiner, 1973):

- locus: interno / esterno
- stabilità
- **controllabilità**



'Ho sbagliato perché pensavo che il numero delle pecore (26) combaciasse con gli anni del capitano ma il problema è che non mi fido di me stessa e mi fido della maestra.'

# Attribuzioni di fallimento

Teoria delle attribuzioni causali (Weiner, 1973):

- locus: interno / esterno
- stabilità
- **controllabilità**

Ho fatto male il compito perché:

- Era difficile
- Il professore ci ha messo le uniche cose che non sapevo
- Non me l'hanno passato
- Non avevo studiato abbastanza
- Mi sentivo male
- Sono andato nel pallone

...

# Un caso interessante per il recupero

L'attribuzione di fallimento a mancanza di 'impegno', inteso genericamente come fatica e lavoro...

...è un boomerang, perché l'impegno non mirato non solo è inutile, può essere addirittura dannoso

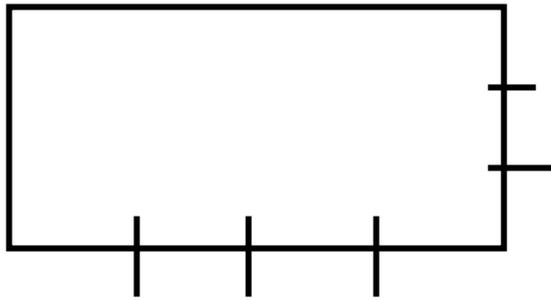
SENSO DI AUTO-EFFICACIA

SULLA MATEMATICA

C  
O  
N  
V  
I  
N  
Z  
I  
O  
N  
I

## Esempio 8: Alessandro

Trovare l'area di un rettangolo, sapendo che il perimetro è 126 cm, e l'altezza è  $\frac{3}{4}$  della base.



...e non conclude

'A questo punto non mi ricordo più la regola.'

Nicola

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

$$x^2 > -\frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$7x^2 + \sqrt{7} > 0$$

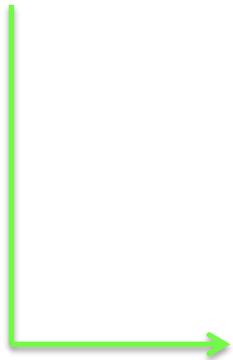
...e poi si blocca

# Nicola

$$-7x^2 < \sqrt{7}$$

- I.: *‘Perché invece di ricordarti cosa devi fare, non provi a risolverla da solo?’*
- N.: *‘La matematica è fatta di regole ben precise che vanno seguite, non ci si può inventare nulla. I problemi si risolvono seguendo quelle regole e io, ora, non mi ricordo come si risolvono le disequazioni.’*

La matematica è fatta di regole da ricordare  
Quello che importa sono le risposte corrette

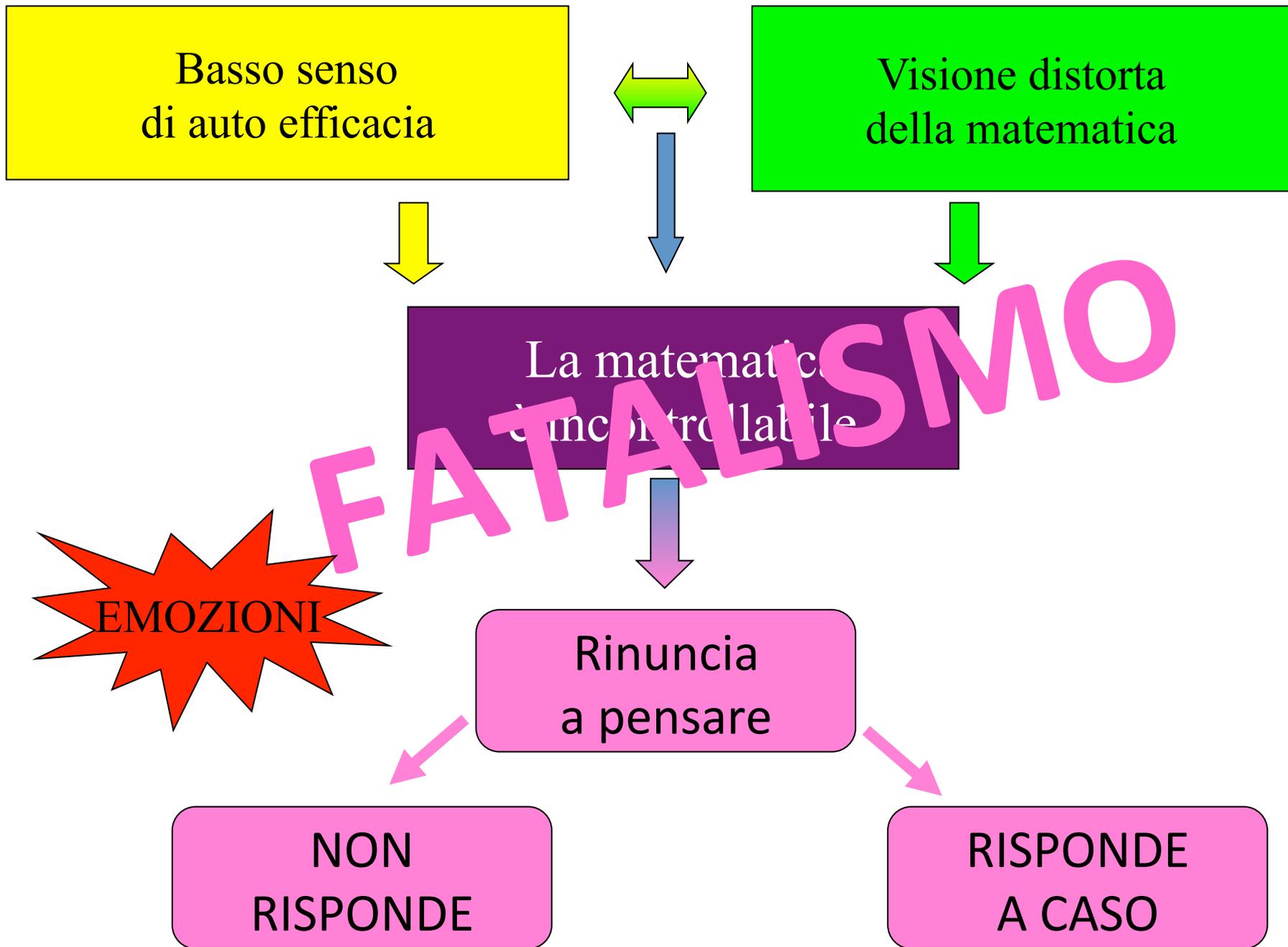


È una visione della matematica ***distorta***

**SENSO DI AUTO-EFFICACIA**

**VISIONE DELLA MATEMATICA**

**C  
O  
N  
V  
I  
N  
Z  
I  
O  
N  
I**



Riassumendo...

Esempio 1:  
Sottrazione

Esempio 2:  
Il segno di =

Esempio 3:  
La gita

Esempio 4:  
Vicino a 100

Esempio 12:  
La somma di pari

**OSSERVAZIONE:**  
Una galleria di  
comportamenti

Esempio 5:  
L'età del capitano

Esempio 11:  
'Non tutti'

Esempio 6:  
Le altezze

Esempio 10:  
Vaso cinese

Esempio 9:  
Le parentesi

Esempio 8:  
Alessandro

Esempio 7:  
Azzurra

# INTERPRETAZIONE

Esempio 1:  
Sottrazione

Esempio 2:  
Il segno di =

Esempio 3:  
La gita

Esempio 4:  
Vicino a 100

Esempio 12:  
La somma di pari

**OSSERVAZIONE:**  
Una galleria di  
comportamenti

Esempio 5:  
L'età del capitano

Esempio 11:  
'Non tutti'

Esempio 6:  
Le altezze

Esempio 10:  
Vaso cinese

Esempio 9:  
Le parentesi

Esempio 8:  
Alessandro

Esempio 7:  
Azzurra

## INTERPRETAZIONE

Esempio 1:  
Sottrazione

Esempio 2:  
Il segno di =

Esempio 3:  
La gita

Esempio 4:  
Vicino a 100

Esempio 12:  
La somma di pari

Apprendimento come  
attività costruttiva:  
- I MISCONCETTI

Esempio 5:  
L'età del capitano

Esempio 11:  
'Non tutti'

Esempio 6:  
Le altezze

Esempio 10:  
Vaso cinese

Esempio 9:  
Le parentesi

Esempio 8:  
Alessandro

Esempio 7:  
Azzurra

## INTERPRETAZIONE

Esempio 1:  
Sottrazione

Esempio 2:  
Il segno di =

Esempio 3:  
La gita

Esempio 4:  
Vicino a 100

Esempio 12:  
La somma di pari

Apprendimento come  
attività costruttiva:  
- I MISCONCETTI

Esempio 5:  
L'età del capitano

Esempio 11:  
'Non tutti'

Esempio 6:  
Le altezze

Esempio 10:  
Vaso cinese

Esempio 9:  
Le parentesi

Esempio 8:  
Alessandro

Esempio 7:  
Azzurra

# INTERPRETAZIONE

Esempio 1:  
Sottrazione

Esempio 2:  
Il segno di =

Esempio 3:  
La gita

Esempio 4:  
Vicino a 100

Esempio 12:  
La somma di pari

Caratteristiche della  
matematica:

- IL LINGUAGGIO
- LA RAZIONALITÀ

Esempio 5:  
L'età del capitano

Esempio 11:  
'Non tutti'

Esempio 6:  
Le altezze

Esempio 10:  
Vaso cinese

Esempio 9:  
Le parentesi

Esempio 8:  
Alessandro

Esempio 7:  
Azzurra

# INTERPRETAZIONE

Esempio 1:  
Sottrazione

Esempio 2:  
Il segno di =

Esempio 3:  
La gita

Esempio 4:  
Vicino a 100

Esempio 12:  
La somma di pari

Caratteristiche della  
matematica:

- IL LINGUAGGIO
- LA RAZIONALITÀ

Esempio 5:  
L'età del capitano

Esempio 11:  
'Non tutti'

Esempio 6:  
Le altezze

Esempio 10:  
Vaso cinese

Esempio 9:  
Le parentesi

Esempio 8:  
Alessandro

Esempio 7:  
Azzurra

## INTERPRETAZIONE

Esempio 1:  
Sottrazione

Esempio 2:  
Il segno di =

Esempio 3:  
La gita

Esempio 4:  
Vicino a 100

Esempio 12:  
La somma di pari

Esempio 11:  
'Non tutti'

Esempio 10:  
Vaso cinese

- Basso senso di auto-efficacia
- Visione distorta della matematica

Esempio 9:  
Le parentesi

Esempio 8:  
Alessandro

Esempio 6:  
Le altezze

Esempio 5:  
L'età del capitano

Esempio 7:  
Azzurra

## INTERPRETAZIONE

Esempio 1:  
Sottrazione

Esempio 2:  
Il segno di =

Esempio 3:  
La gita

Esempio 4:  
Vicino a 100

Esempio 12:  
La somma di pari

Esempio 11:  
'Non tutti'

Esempio 10:  
Vaso cinese

- Basso senso di auto-efficacia
- Visione distorta della matematica

Esempio 9:  
Le parentesi

Esempio 8:  
Alessandro

Esempio 6:  
Le altezze

Esempio 5:  
L'età del capitano

Esempio 7:  
Azzurra

## INTERPRETAZIONE

Apprendimento come  
attività costruttiva:  
- I MISCONCETTI

La matematica:  
- IL LINGUAGGIO  
- LA RAZIONALITÀ

RESPONSABILITÀ  
DELL'INSEGNAMENTO

- Basso senso di auto-efficacia
- Visione distorta della matematica

## INTERPRETAZIONE

Apprendimento come  
attività costruttiva:

- I MISCONCETTI



RESPONSABILITÀ  
DELL'INSEGNAMENTO

- ignorare le implicazioni di tale modello può portare a scelte didattiche inadeguate
- può favorire la costruzione di MODELLI PRIMITIVI

## INTERPRETAZIONE

La matematica:

- IL LINGUAGGIO
- LA RAZIONALITÀ

RESPONSABILITÀ  
DELL'INSEGNAMENTO



→ Ignorare il rapporto complesso fra:  
LINGUAGGIO QUOTIDIANO / LINGUAGGIO MATEMATICO  
può portare a forzare precocemente l'uso di un linguaggio  
formale.

## INTERPRETAZIONE

La matematica:

- IL LINGUAGGIO
- LA RAZIONALITÀ

RESPONSABILITÀ  
DELL'INSEGNAMENTO

→ Ignorare il ruolo della RAZIONALITÀ QUOTIDIANA può portare a non sfruttare nel modo adeguato il riferimento al vissuto dell'allievo e alle sue esperienze di vita reale, che possono diventare ostacoli invece che risorse (v. ad esempio la formulazione dei problemi).

Ma soprattutto...

## INTERPRETAZIONE

- Da quali pratiche didattiche nascono?
- Come si possono prevenire / sradicare?

RESPONSABILITÀ  
DELL'INSEGNAMENTO



- Basso senso di auto-efficacia
- Visione distorta della matematica